



**formules de caracteres pour des representations
irreductibles des groupes classiques en egale
caracteristique**

Sebastien Foule

► **To cite this version:**

Sebastien Foule. formules de caracteres pour des representations irreductibles des groupes classiques en egale caracteristique. Mathématiques [math]. Université Claude Bernard - Lyon I, 2004. Français. tel-00006408

HAL Id: tel-00006408

<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00006408>

Submitted on 7 Jul 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

présentée devant

L'UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON 1

pour l'obtention du

DIPLÔME DE DOCTORAT

(arrêté du 25 avril 2002)

présentée et soutenue publiquement le 10 juin 2004 par

Sébastien FOULLE

Spécialité : mathématiques pures

Formules de caractères pour des représentations
irréductibles des groupes classiques en égale
caractéristique

Au vu des rapports de :

M. Bernard LECLERC,
M. Wolfgang SOERGEL.

Devant la commission d'examen formée de :

M. Cédric BONNAFÉ,
M. Meinolf GECK,
M. Bernard LECLERC,
M. Olivier MATHIEU, Directeur de thèse
M. Wolfgang SOERGEL, Président du jury.

Remerciements

Je remercie tout d'abord mon directeur de thèse Olivier Mathieu pour le joli sujet de thèse qu'il m'a donné. Je souhaite aussi le remercier pour ses conseils et sa patience. Je remercie également Bernard Leclerc et Wolfgang Soergel, qui me font l'honneur d'être mes rapporteurs, ainsi que Meinolf Geck et Cédric Bonnafé qui ont bien voulu être membres de mon jury.

Je tiens à remercier Philippe Caldero qui m'a fait découvrir le logiciel LiE, avec lequel j'ai testé mes premiers résultats. Je remercie également Jérôme Germoni pour le temps qu'il a bien voulu me consacrer, et j'exprime ma profonde gratitude à Thierry Dumont et Romaric Pujol pour leur aide précieuse lorsque je luttais avec L^AT_EX.

Un grand merci au personnel du secrétariat de l'Institut Girard Desargues : Sybil Carabœuf, Monique Gaffier et Maria Konieczny, toujours aimables et disponibles.

Je remercie enfin mes anciens camarades de bureau et les copains algébristes du premier étage : Olivier Brunat, David Hézard, Nicolas Jacon, Camille Laurent-Gengoux, Ammar Mahmood, Guillaume Malod, Elie Mosaki, Malik Talbi, Boris Thibert et Séverine Verneyre.

Table des matières

Introduction	v
1 Algèbre de Clifford et groupes classiques	1
1.1 L'algèbre de Clifford	1
1.2 Les groupes classiques connexes	4
1.2.1 Groupe symplectique	5
1.2.2 Groupe spécial orthogonal impair	5
1.2.3 Groupe spécial orthogonal pair	6
1.2.4 Groupes spin	6
1.3 Groupes classiques non connexes	7
1.3.1 Sous-groupes remarquables	7
1.3.2 Représentations : théorie de Clifford	8
1.3.3 Caractères irréductibles de $O(2r)$	10
2 Produits tensoriels en caractéristique zéro	13
2.1 Opérateur de Weyl	13
2.2 La décomposition fondamentale	15
2.3 Expressions combinatoires	23
3 Modules en caractéristique p	27
3.1 Modules simples, modules de Weyl	28
3.2 Le groupe de Weyl affine	30
3.3 Modules basculants	32
3.3.1 Premières propriétés	33
3.3.2 Modules basculants indécomposables	34
3.3.3 Formule modulaire de Verlinde	35
3.4 Application aux groupes classiques	36
3.4.1 Alcôve fondamentale	36
3.4.2 Puissances extérieures de la représentation naturelle	37
3.4.3 Suite exacte	37
3.4.4 Produits tensoriels	38

4	Paires duales	45
4.1	Principe de dualité	45
4.2	Cinq paires duales	47
4.3	La correspondance $\lambda \leftrightarrow \tilde{\lambda}$	50
4.4	Echange des dimensions et des multiplicités	52
5	Caractères en caractéristique zéro	57
5.1	Synthèse des chapitres 2 et 4	57
5.2	Une correspondance entre tableaux	59
5.3	G -poids des G -tableaux	60
5.4	Caractères en caractéristique zéro	62
5.5	Caractères de $O(2n)$ en caractéristique zéro	64
6	Caractères en caractéristique p	67
6.1	Formules particulières pour le groupe symplectique	67
6.2	Formules particulières pour les autres groupes	70
6.3	Situation générale	72
7	Modules simples de plus haut poids ω_i ou $\omega_i + \omega_j$	79
7.1	Approche qualitative	80
7.2	Convolution binômiale	83
7.3	Série génératrice pour $SL(2)$	84
7.3.1	Expression à l'aide des polynômes de Chebyshev	85
7.3.2	Formules explicites	86
7.3.3	Décomposition en éléments simples	89
7.4	Série génératrice pour chaque famille de groupes	90
7.5	Formules pour les groupes symplectiques et spin	93
7.5.1	Séries entières élémentaires	94
7.5.2	Modules de Weyl	95
7.6	Expressions trigonométriques	97
7.7	Comportement asymptotique	98
8	Modules de Weyl de plus haut poids ω_r ou $\omega_+ + \omega_r$	101
8.1	Matrices de décomposition	101
8.2	Modules de Weyl simples	103
8.3	Inverse de la matrice de décomposition	106
8.3.1	Notations	106
8.3.2	Structure fractale	109
8.3.3	Matrices $\tilde{B}(p^n)$	113
8.3.4	Matrices $\tilde{A}(p^n)$	114
8.4	Application à $SL(2)$	116

Introduction

Les représentations des groupes classiques en caractéristique zéro ont été étudiées tout au long du vingtième siècle, et on peut considérer qu'elles sont bien comprises depuis deux décennies. Les premiers résultats significatifs sont obtenus par Schur qui donne en 1901 la description des représentations polynômiales du groupe linéaire (cf. [20]). En 1925, Weyl démontre la formule des caractères qui porte son nom, formule dont on pourrait croire qu'elle met un point final à l'étude des représentations. Elle ne donne cependant pas une construction vectorielle des représentations irréductibles. En outre on souhaiterait exprimer les dimensions des sous-espaces de poids, qui sont des nombres entiers positifs, comme le cardinal d'un ensemble (en l'occurrence, un ensemble de tableaux sur un diagramme de Young) plutôt que comme une somme de quantités positives et négatives. En 1946 paraît le livre de Weyl "Les groupes classiques" [44], dans lequel il utilise les paires duales pour construire explicitement les représentations irréductibles des groupes linéaires, symplectiques et orthogonaux. A la même époque, on sait décrire les caractères irréductibles du groupe linéaire à l'aide de tableaux semi-standards. Il faut attendre 1962 (Zhelobenko [48]) pour obtenir une combinatoire analogue pour le groupe symplectique et 1983 (King [28]) pour le groupe orthogonal. On dispose également de la formule de Littlewood-Richardson pour décomposer les produits tensoriels des représentations irréductibles, formule énoncée dans les années trente pour le groupe linéaire et démontrée pour tous les groupes classiques à la fin des années quatre-vingt par Littelman [32].

La situation est beaucoup moins favorable en caractéristique p , mais des progrès sensibles ont été accomplis ces dernières années, en particulier grâce à la conjecture de Lusztig [35]. Celle-ci exprime le caractère des modules simples comme une combinaison linéaire explicite de caractères de modules de Weyl, pourvu que p soit supérieur ou égal au nombre de Coxeter de G . Andersen, Jantzen et Soergel [1] ont montré que pour un système de racines fixé, la conjecture est vraie pour p suffisamment grand, mais sans borne explicite. L'emploi couplé des modules basculants et des paires duales de groupes a également permis des avancées notables pour le groupe linéaire (Mathieu et Papadopoulo [37], Mathieu [38]) et le groupe symétrique (Mathieu [38], Erdmann [14]). Nous appliquons cette dernière méthode aux groupes $G = \mathrm{Sp}(2m)$, $\mathrm{SO}(2m)$, $\mathrm{SO}(2m + 1)$, $\mathrm{Spin}(2m)$ et $\mathrm{Spin}(2m + 1)$ définis sur la clôture algébrique d'un corps fini de caractéristique p , le cas $p = 2$ se présentant uniquement pour le groupe symplectique. Nous en déduisons le caractère de certaines représentations

rationnelles irréductibles sur ce même corps. On obtient notamment des formules de caractères non couvertes par la conjecture de Lusztig, et on a des résultats particulièrement précis pour les représentations de plus haut poids un poids fondamental ou une somme de deux poids fondamentaux.

Avant de détailler le plan de cette thèse, il nous faut expliquer la démarche suivie. On désigne par K le corps de base qui est, suivant le contexte, le corps des nombres complexes ou la clôture algébrique d'un corps fini de caractéristique p . Le groupe classique G est défini sur K et les représentations rationnelles considérées sont des espaces vectoriels de dimension finie sur K . On emploie indifféremment les termes “représentation (irréductible) de G ” et “ G -module (simple)”. Les deux outils principaux de cette thèse sont la théorie des paires duales et celle des modules basculants, théories dont nous mentionnons maintenant quelques points essentiels.

Soit G_{aux} un groupe classique auxiliaire et soit M un $G \times G_{\text{aux}}$ -module tels que l'algèbre des endomorphismes de M commutant à l'action de G soit engendrée par l'action de G_{aux} et vice-versa. Le module M est ce qu'on appelle une (G, G_{aux}) paire duale au sens de Howe [22]. Rappelons rapidement la théorie des paires duales en caractéristique zéro. Il existe une correspondance bijective ϕ_M entre certaines représentations irréductibles de G et de G_{aux} . Si L est une représentations irréductible de G apparaissant dans M , la représentation irréductible $\phi_M(L)$ est caractérisée par le fait que $L \otimes \phi_M(L)$ est un facteur direct de M , et on montre que ce facteur est sans multiplicité. Ainsi la dimension de L est la multiplicité de $\phi_M(L)$ dans M vu comme G_{aux} -module. Cette dualité échange donc les dimensions et les multiplicités. En caractéristique p , le $G \times G_{\text{aux}}$ -module M ne peut pas s'écrire comme somme directe de représentations irréductibles, mais on montre qu'on a toujours une correspondance bijective ϕ_M entre les facteurs de composition du G -module M et les facteurs directs indécomposables du G_{aux} -module M , et la dimension de L est la multiplicité de $\phi_M(L)$ comme facteur direct du G_{aux} -module M . Cette multiplicité est en général difficile à calculer.

Dans notre cas, les facteurs indécomposables de M sont basculants, et sous l'action de G_{aux} , M s'écrit comme une puissance tensorielle de l'algèbre extérieure de la représentation naturelle de G_{aux} . Il s'agit donc de comprendre la décomposition de ces produits tensoriels en somme directe de G_{aux} -modules basculants indécomposables. Les modules basculants d'un groupe algébrique ont été introduits au début des années quatre-vingt-dix par Donkin [13]. Cette catégorie de modules jouit de propriétés remarquables, elle est notamment stable par produit tensoriel et les modules basculants indécomposables sont paramétrés par les poids dominants du groupe. On dispose en outre de la formule modulaire de Verlinde (Mathieu et Georgiev [18]) qui, sous certaines conditions, donne une décomposition partielle des produits tensoriels de modules basculants indécomposables. Cette formule fait intervenir le groupe de Weyl affine, ainsi que les constantes de Kostant qui décrivent la décomposition analogue en caractéristique zéro. Si on revient à la paire duale M , on est ainsi amené à étudier la décomposition des produits tensoriels des puissances extérieures de la

INTRODUCTION

représentation naturelle de G_{aux} en caractéristique zéro, pour en déduire les multiplicités des modules basculants qui sont facteurs directs de M . On obtient finalement les dimensions et le caractère de certaines représentations irréductibles de G en caractéristique p .

Dans le premier chapitre, on rappelle la définition et les propriétés bien connues de l'algèbre de Clifford. On fait aussi quelques rappels sur les groupes classiques et leurs représentations, en particulier pour les groupes non connexes. On mentionne enfin, lorsque $K = \mathbb{C}$, une formule de caractère sur la seconde composante connexe des groupes orthogonaux pairs.

Au second chapitre, on suppose $K = \mathbb{C}$, on considère le groupe $G_{\text{aux}} = \text{Sp}(2n)$, $\text{Spin}(2n + 1)$, $\text{Pin}(2n)$, $\text{O}(2n)$ ou $\text{O}(2n + 1)$ et on calcule la décomposition des produits tensoriels $\Lambda^l V \otimes L(\beta)$, où β est un poids dominant de G_{aux} et V est la représentation naturelle de G_{aux} . Ces décompositions s'expriment en termes de boîtes ajoutées et retranchées au diagramme de Young de β . On traduit ensuite cette décomposition en termes de tableaux sur des diagrammes gauches.

Le troisième chapitre débute par un rappel de quelques résultats fondamentaux sur les représentations en caractéristique p . On signale notamment le rôle essentiel joué par le groupe de Weyl affine, et on énonce la conjecture de Lusztig. Puis nous exposons brièvement la théorie des modules basculants pour les groupes algébriques et la formule modulaire de Verlinde. Ces résultats sont ensuite appliqués aux groupes classiques.

Au quatrième chapitre, on étudie cinq paires duales décrites par Adamovich et Rybnikov [2]. On commence par une discussion en caractéristique zéro pour éclairer la suite. Puis on construit la correspondance ϕ mentionnée ci-dessus, et on montre que les dimensions des sous-espaces de poids des G -modules simples sont des multiplicités, comme facteurs directs, de G_{aux} -modules basculants indécomposables dans des produits tensoriels de puissances extérieures de la représentation naturelle de G_{aux} .

Le cinquième chapitre réalise la synthèse des chapitres 2 et 4 et prépare le chapitre suivant. On y retrouve les formules de caractères des groupes classiques en caractéristique zéro, exprimées à l'aide de G -tableaux sur des diagrammes de Young, telles qu'elles sont formulées par Proctor [40], et on démontre aussi la formule de caractère pour les groupes orthogonaux pairs signalée au premier chapitre.

Les chapitres qui suivent rassemblent de nombreux résultats nouveaux, on détaille donc leur contenu.

Dans le sixième chapitre, on trouve des formules de caractères en caractéristique p en termes de G -tableaux. On commence par énoncer des formules simples lorsque le plus haut poids est un poids fondamental soumis à une certaine condition. Si $G = \text{Sp}(2m)$, on a ainsi une nette amélioration d'un résultat de Gow [19]. On retrouve également un théorème de Suprunenko et Zalesskii [42]. Puis on donne des formules s'appliquant à des poids dominants plus généraux. L'intérêt principal de ces

formules est qu'elles sont valables même si la caractéristique est inférieure au nombre de Coxeter, pourvu que le plus haut poids satisfasse la condition rappelée dans les tableaux page ix. On est donc en dehors du domaine de la conjecture de Lusztig. On mentionne également la stabilité, en un certain sens, des formules obtenues.

Le septième chapitre est consacré aux représentations irréductibles de plus haut poids un poids fondamental ou une somme de deux poids fondamentaux. On exploite dans ce chapitre la connaissance précise qu'on a des modules basculants de $SL(2)$, connaissance qui s'exprime de manière commode à l'aide de séries génératrices. On obtient plusieurs expressions pour la dimension des représentations irréductibles, sans les restrictions du chapitre précédent sur le plus haut poids. On obtient aussi des formules donnant le caractère de la représentation quand $G = Sp(2m)$, $Spin(2m + 1)$ ou $Spin(2m)$, et on en trouvera d'autres au chapitre suivant. On conclut le chapitre en déterminant le comportement asymptotique des dimensions, à p fixé, lorsque le rang du groupe tend vers l'infini.

Enfin, au dernier chapitre, on considère les modules de Weyl de plus haut poids un poids fondamental (resp. la somme d'un poids fondamental et du plus haut poids de la représentation spin) lorsque $G = Sp(2m)$ (resp. $Spin(2m + 1)$ ou $Spin(2m)$). Après avoir rappelé la description de leurs facteurs de composition, on décrit en termes élémentaires, parmi ces modules de Weyl, ceux qui sont simples (pour le groupe spécial linéaire ou le groupe orthogonal, les modules de Weyl de plus haut poids un poids fondamental sont simples, cf. [47]). Puis on exprime le caractère des modules simples de plus haut poids un poids fondamental (resp. la somme d'un poids fondamental et du plus haut poids de la représentation spin) comme une somme alternée de caractères de modules de Weyl, ce qui précise un énoncé obtenu au chapitre précédent. On conclut ce chapitre par un résultat concernant les modules simples de $SL(2)$: on reformule la description des facteurs de composition des modules de Weyl obtenue par Carter et Cline [8], et on en déduit le caractère des modules simples comme une somme alternée de caractères de modules de Weyl.

Les tableaux figurant sur la page ix donnent, pour chaque groupe classique, la condition que doit vérifier le plus haut poids λ pour qu'on puisse déterminer le caractère et/ou la dimension du module simple $L(\lambda)$ de plus haut poids λ . On indique également les théorèmes correspondants.

Soit m le rang du groupe G . On note $\pm\varepsilon_1, \dots, \pm\varepsilon_m$ les poids non nuls de la représentation naturelle de G . Pour tout $l \geq 1$ on pose $\Omega_l = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_l$. Si $G = Sp(2m)$, les poids Ω_l sont les poids fondamentaux. Si $G = Spin(2m + 1)$ ou $SO(2m + 1)$ et $l \neq m$, Ω_l est un poids fondamental. Si $G = Spin(2m)$ ou $SO(2m)$ et $l \neq m, m - 1$, Ω_l est un poids fondamental. Dans l'expression $\Omega_{i_1} + \dots + \Omega_{i_n}$, l'entier n est toujours supposé strictement plus grand que 1 et $i_1 \geq i_2 \geq \dots \geq i_n$.

INTRODUCTION

Sp(2m)	ch $L(\Omega_{i_1} + \cdots + \Omega_{i_n})$ avec $i_{n-1} + i_n \geq 2(m + n + \frac{1-p}{2}) - 1$ théorème 6.12
	ch $L(\frac{p-3}{2}\Omega_m + \Omega_{m-1})$ et ch $L(\frac{p-1}{2}\Omega_m)$ avec p impair théorème 6.3, résultat obtenu par Suprunenko et Zalesskii [42]
	ch $L(\Omega_l)$ avec $l \geq m + 2 - p$ théorème 6.1, amélioration d'un résultat de Gow [19]
	ch $L(\Omega_l)$ pour tout l proposition 7.24, théorème 7.26, corollaire 7.29, proposition 7.31 et théorème 8.16
Spin(2m + 1)	ch $L(\omega_+ + \Omega_{i_1} + \cdots + \Omega_{i_n})$ avec $i_n \geq m + n + \frac{1-p}{2}$ théorème 6.13
	ch $L(\omega_+ + \Omega_l)$ avec $l \geq m + \frac{3-p}{2}$ théorème 6.7
	ch $L(\omega_+ + \Omega_l)$ pour tout l proposition 7.23, théorème 7.26, corollaire 7.29, proposition 7.31 et théorème 8.16
Spin(2m)	ch $L(\omega_+ + \Omega_{i_1} + \cdots + \Omega_{i_n})$ avec $i_n \geq m + n + \frac{1-p}{2}$ théorème 6.14
	ch $L(\omega_+ + \Omega_l)$ avec $l \geq m + \frac{3-p}{2}$ théorème 6.8
	ch $L(\omega_+ + \Omega_l)$ pour tout l proposition 7.23, théorème 7.26, corollaire 7.29, proposition 7.31 et théorème 8.16
SO(2m + 1)	ch $L(\Omega_{i_1} + \cdots + \Omega_{i_n})$ avec $i_{n-1} + i_n \geq 2(m + n + \frac{1-p}{2}) - 2$ et $n \geq 3$ théorème 6.15
	ch $L(\Omega_k + \Omega_l)$ avec $k + l \geq 2m + 3 - p$ théorème 6.9
	dim $L(\Omega_k + \Omega_l)$ pour tous k et l proposition 7.31
SO(2m)	ch $L(\Omega_{i_1} + \cdots + \Omega_{i_n})$ avec $i_{n-1} + i_n \geq 2(m + n + \frac{1-p}{2}) - 3$ et $n \geq 3$ théorème 6.15
	ch $L(\Omega_k + \Omega_l)$ avec $k + l \geq 2m + 2 - p$ théorème 6.10
	dim $L(\Omega_k + \Omega_l)$ pour tous k et l proposition 7.31

INTRODUCTION

Chapitre 1

Algèbre de Clifford et groupes classiques

Soit $K = \mathbb{C}$ ou $\overline{\mathbb{F}_p}$. Avant de rentrer dans le vif du sujet, il nous faut décrire les différents groupes, définis sur K , que nous allons rencontrer. Certains d'entre eux sont des revêtements de groupes orthogonaux, et l'algèbre de Clifford permet de les étudier commodément. On commence donc par rappeler les propriétés de base de cette algèbre, en particulier la réalisation du groupe spin comme sous-groupe du groupe des éléments inversibles de l'algèbre. On décrit ensuite les modules simples de l'algèbre de Clifford, qui jouent un rôle important dans la construction des paires duales au chapitre 4.

Pour les groupes symplectiques, spéciaux orthogonaux et spin, on explicite un tore maximal et un sous-groupe de Borel le contenant, ainsi que le système de racines associé. On rappelle aussi comment construire, en caractéristique zéro, les représentations irréductibles de plus haut poids un poids fondamental à l'aide des puissances extérieures de la représentation naturelle du groupe. Pour les groupes classiques non connexes, on définit les analogues des tores, poids, etc. et on rappelle comment obtenir leurs représentations irréductibles via la théorie de Clifford. On termine en détaillant la situation dans le cas du groupe orthogonal pair.

On notera que les résultats de ce chapitre sont valables en toute caractéristique, sauf mention explicite du contraire, la caractéristique 2 n'étant considérée que dans le cas du groupe symplectique. On remarquera aussi que les différents groupes utilisés dans ce chapitre sont paramétrés par la lettre r , alors que dans les chapitres suivants le paramètre sera n , ou m , ou les deux. On aura en effet à considérer des paires $(G_1(m), G_2(n))$ de groupes, c'est pourquoi on choisit dans ce chapitre la lettre "neutre" r .

1.1 L'algèbre de Clifford

Le lecteur trouvera toutes les propriétés mentionnées ici et bien d'autres résultats dans l'ouvrage de Chevalley [10]. Il pourra aussi consulter [7], [17] et [33] pour les

CHAPITRE 1. ALGÈBRE DE CLIFFORD ET GROUPES CLASSIQUES

propriétés spécifiques à la caractéristique zéro.

Définition 1.1 Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur K . Une forme quadratique q sur V est une application de V dans K telle que :

1. $q(av) = a^2q(v)$ pour tous $a \in K$ et $v \in V$.
2. l'application $b : V \times V \rightarrow K$ définie par $b(v, w) = q(v + w) - q(v) - q(w)$ est bilinéaire.

La forme bilinéaire b est appelée la polarisation de q .

On rappelle qu'un sous-espace vectoriel W de V est dit totalement isotrope si la restriction de q à W est nulle, et q est dite non dégénérée si sa polarisation est non dégénérée.

Soit V un espace vectoriel de dimension finie muni d'une forme quadratique q . L'algèbre de Clifford $(\text{Cliff}(V), i)$ est la donnée d'une algèbre unitaire $\text{Cliff}(V)$ et d'une application linéaire $i : V \rightarrow \text{Cliff}(V)$ telle que $i(v)^2 = q(v)$ pour tous $v \in V$. En outre on demande que l'algèbre de Clifford soit universelle pour cette propriété : si E est une algèbre unitaire et si $j : V \rightarrow E$ est une application linéaire telle que $j(v)^2 = q(v)$ pour tous $v \in V$, alors il existe un unique homomorphisme d'algèbres $k : \text{Cliff}(V) \rightarrow E$ tel que $j = k \circ i$, ce qu'on représente par le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{j} & E \\ & \searrow i & \downarrow k \\ & & \text{Cliff}(V) \end{array}$$

On a clairement la règle de commutation $i(v)i(w) + i(w)i(v) = b(v, w)$ pour tous $v, w \in V$. Remarquons que dans la littérature, on trouve aussi la formule $i(v)^2 = -q(v)$ dans la définition de l'algèbre de Clifford, et on passe d'une convention à l'autre en remplaçant partout q par $-q$.

On construit $\text{Cliff}(V)$ en quotientant l'algèbre tensorielle $T(V)$ de V par l'idéal bilatère I engendré par les $v \otimes v - q(v)$ ($v \in V$), et l'application i est la composée de l'inclusion $V \subset T(V)$ et de la projection naturelle $T(V) \rightarrow \text{Cliff}(V)$. En particulier $\text{Cliff}(V)$ est engendrée par $i(V)$. L'idéal I est engendré par des éléments de degré pair, ce qui munit $\text{Cliff}(V)$ d'une structure d'algèbre graduée sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On note $\text{Cliff}_+(V)$ la partie paire de $\text{Cliff}(V)$, c'est-à-dire le sous-espace engendré par les produits d'un nombre pair d'éléments de $i(V)$. On a aussi une filtration naturelle sur $\text{Cliff}(V)$, héritée de l'algèbre tensorielle de V , et on montre que l'algèbre graduée qui s'en déduit est isomorphe à l'algèbre extérieure de V . Ceci implique la proposition

Proposition 1.2 Si (e_1, \dots, e_l) est une base de V , alors les produits $e_{i_1} \dots e_{i_k}$, pour tout $k \leq l$ et tous $i_1 < \dots < i_k$ forment une base de $\text{Cliff}(V)$. En particulier l'application i est un plongement de V dans $\text{Cliff}(V)$.

On convient de ne plus mentionner le plongement i et on écrit simplement $V \subset \text{Cliff}(V)$. A l'aide de la propriété universelle, on construit trois involutions remarquables de $\text{Cliff}(V)$ que l'on décrit ci-dessous.

1.1. L'ALGÈBRE DE CLIFFORD

Définition 1.3 *L'involution principale de $\text{Cliff}(V)$ est l'automorphisme α de $\text{Cliff}(V)$ défini par la formule $\alpha(v_1 \dots v_k) = (-1)^k v_1 \dots v_k$ pour tous $v_1, \dots, v_k \in V$. L'antiautomorphisme principal β de $\text{Cliff}(V)$ est défini par la formule $\beta(v_1 \dots v_k) = v_k \dots v_1$ pour tous $v_1, \dots, v_k \in V$. Enfin on appelle conjugaison l'antiautomorphisme $*$ = $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$.*

Exemple 1.4 Supposons exceptionnellement que $K = \mathbb{R}$. Si V est un espace vectoriel de dimension 1, de base (i) et muni de la forme quadratique définie par $q(i) = -1$, on a $\text{Cliff}(V) = \mathbb{C}$ et $*$ est la conjugaison complexe. Si V est un espace vectoriel de dimension 2, de base (i, j) et muni de la forme quadratique définie par $q(ai + bj) = -a^2 - b^2$, $\text{Cliff}(V)$ est l'algèbre des quaternions et $*$ est la conjugaison des quaternions.

A partir de maintenant, la forme quadratique q est supposée non dégénérée.

On définit maintenant les groupes $\text{Spin}(V)$ et $\text{Pin}(V)$, lorsque p est impair, comme des sous-groupes de $\text{Cliff}(V)^*$.

Définition 1.5 *Soit $\text{Pin}(V) = \{s \in \text{Cliff}(V) \mid s\beta(s) = 1 \text{ et } sVs^{-1} \subset V\}$ et $\text{Spin}(V) = \text{Pin}(V) \cap \text{Cliff}_+(V)$. Le morphisme de groupes $\chi : \text{Pin}(V) \rightarrow \text{GL}(V)$ défini par $\chi(s)(v) = svs^{-1}$ est appelée la représentation naturelle de $\text{Pin}(V)$ (et de $\text{Spin}(V)$ par restriction).*

Notons que l'image de χ est contenue dans le groupe $\text{O}(V)$ car pour tout $s \in \text{Pin}(V)$, on a $q(\chi(s)(v), \chi(s)(v)) = (\chi(s)(v))^2 = (svs^{-1})^2 = sv^2s^{-1} = sq(v, v)s^{-1} = q(v, v)$.

En caractéristique zéro, le groupe $\text{Spin}(V)$ est le revêtement universel, à deux feuillets, du groupe spécial orthogonal $\text{SO}(V)$, et $\text{Pin}(V)$ est un revêtement non connexe à deux feuillets du groupe orthogonal $\text{O}(V)$. En outre $\text{Spin}(V)$ est un sous-groupe d'indice deux de $\text{Pin}(V)$. C'est aussi vrai en caractéristique impaire, comme le montre le théorème ci-dessous.

Théorème 1.6 *Les morphismes de groupes $\chi : \text{Pin}(V) \rightarrow \text{O}(V)$ et $\chi : \text{Spin}(V) \rightarrow \text{SO}(V)$ sont surjectifs de noyau $\{\pm 1\}$.*

La proposition qui suit donne une autre définition possible des groupes $\text{Spin}(V)$ et $\text{Pin}(V)$, et elle implique en particulier que l'algèbre $\text{Cliff}(V)$ (resp. $\text{Cliff}_+(V)$) est engendrée par $\text{Pin}(V)$ (resp. $\text{Spin}(V)$), car V possède des bases orthonormées en caractéristique impaire lorsque q est non dégénérée.

Proposition 1.7 *Le groupe $\text{Pin}(V)$ est engendré par les $v \in V$ tels que $v^2 = 1$, et $\text{Spin}(V)$ est engendré par les produits vw avec $v, w \in V$ tels que $v^2 = w^2 = 1$.*

On termine cette section en rappelant les théorèmes bien connus qui fournissent une construction explicite des modules simples de $\text{Cliff}(V)$ (resp. $\text{Cliff}_+(V)$) lorsque V est de dimension paire (resp. impaire). On emploie la notation $w_1 \wedge \dots \wedge \widehat{w}_i \wedge \dots \wedge w_r$, qui signifie que le vecteur w_i a été retiré du produit.

CHAPITRE 1. ALGÈBRE DE CLIFFORD ET GROUPES CLASSIQUES

Théorème 1.8 *Soit V de dimension paire. On considère une décomposition $V = W \oplus W'$ avec W et W' totalement isotropes. L'algèbre $\text{Cliff}(V)$ admet un unique module simple, vectoriellement isomorphe à ΛW et sur lequel $\text{Cliff}(V)$ agit comme suit :*

1. $w \in W$ agit sur ΛW par multiplication extérieure :

$$w \cdot (w_1 \wedge \cdots \wedge w_r) = w \wedge w_1 \wedge \cdots \wedge w_r \text{ pour tous } w_1, \dots, w_r \in V.$$

2. $w' \in W'$ agit sur ΛW par dérivation intérieure :

$$w' \cdot (w_1 \wedge \cdots \wedge w_r) = \sum_i (-1)^{i+1} b(w', w_i) w_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{w}_i \cdots \wedge w_r \text{ pour tous } w_1, \dots, w_r \in V.$$

Théorème 1.9 *Soit V de dimension impaire tel que $V = Kx_0 \oplus N$ avec $q(x_0) \neq 0$ et N l'orthogonal de x_0 . Si on munit N de la forme quadratique $-q(x_0)q$, on a un isomorphisme d'algèbres de $\text{Cliff}(N)$ sur $\text{Cliff}_+(V)$ qui envoie y sur $x_0 y$ pour tout $y \in N$.*

Remarquons que, comme K est algébriquement clos, l'algèbre de Clifford de N muni de la forme quadratique $-q(x_0)q$ est isomorphe à l'algèbre de Clifford de N muni de la forme quadratique q .

1.2 Les groupes classiques connexes

Les notations de cette section s'inspirent de l'article d'Adamovich et Rybnikov [2], ainsi que du livre de Fulton et Harris [17].

Pour $r \in \mathbb{N}, r \geq 1$, on considère les groupes connexes suivants : $\text{Sp}(2r)$, $\text{SO}(2r)$, $\text{SO}(2r+1)$, $\text{Spin}(2r)$, $\text{Spin}(2r+1)$. Soit G l'un de ces groupes et soit V la représentation naturelle de G , munie de la forme bilinéaire alternée non dégénérée b ou de la forme quadratique non dégénérée q . On note H un tore maximal, B un sous-groupe de Borel contenant H , U son radical unipotent, B^- le sous-groupe de Borel opposé à B , U^- son radical unipotent et W le groupe de Weyl de G . Soit $P = X(H)$ le groupe des caractères de H et P^+ l'ensemble des poids dominants relativement au sous-groupe de Borel B . Le paramétrage classique des G -modules simples en caractéristique zéro s'étend en toute caractéristique.

Théorème 1.10 (Borel-Weyl) *Soit G un groupe algébrique simple connexe et P^+ l'ensemble des poids dominants relativement à un sous-groupe de Borel. Pour tout $\lambda \in P^+$, il existe une unique représentation irréductible de plus haut poids λ , notée $L(\lambda)$, et toute représentation irréductible est isomorphe à un certain $L(\mu)$.*

Décrivons brièvement les choix de H, B, \dots dans chaque cas à l'aide d'une base convenablement choisie de V . Pour les trois premiers groupes qui suivent, et relativement aux bases précisées ci-dessous, H est le sous-groupe des matrices diagonales et B est le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures. On désigne

1.2. LES GROUPES CLASSIQUES CONNEXES

par $\text{diag}(d_1, \dots, d_k)$ ($k = \dim V$) la matrice diagonale dont, pour tout j , le coefficient à l'intersection de la ligne j et de la colonne j est d_j . Pour tout $1 \leq j \leq r$ on définit le poids ε_j qui associe à toute matrice diagonale son coefficient d_j . On décrit également ci-dessous les puissances extérieures de la représentation standard de G lorsque $K = \mathbb{C}$ (et aussi pour K de caractéristique p si G est un groupe orthogonal), car elles jouent un rôle technique important dans la suite.

1.2.1 Groupe symplectique

Soit $G = \text{Sp}(2r)$. On note $(z_1, \dots, z_r, z_{-r}, \dots, z_{-1})$ une base de V telle que pour tout $1 \leq i \leq n$, $-n \leq j \leq n$, la forme bilinéaire alternée b vérifie $b(z_i, z_j) = 1$ si $i = -j$ et 0 sinon.

Une matrice diagonale $\text{diag}(h_1, \dots, h_r, h_{-r}, \dots, h_{-1})$ est dans H si et seulement si $h_j h_{-j} = 1$ pour tout j .

Les racines positives (resp. simples) sont les $(\varepsilon_i + \varepsilon_j)_{1 \leq i < j \leq r}$ et les $(\varepsilon_i - \varepsilon_j)_{1 \leq i < j \leq r}$ (resp. $(\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1})_{1 \leq i < r}$ et $2\varepsilon_r$). Les poids fondamentaux sont $\omega_1 = \varepsilon_1, \omega_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \dots, \omega_r = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_r$.

Tout poids λ s'écrit $\lambda = \sum_{i=1}^r \lambda_i \varepsilon_i$, avec les λ_i entiers, et λ est dominant si et seulement si $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r \geq 0$. On associe à $\lambda \in P^+$ le diagramme de Young $Y(\lambda)$ avec λ_1 boîtes sur la première ligne, λ_2 boîtes sur la seconde ligne, etc.

A tout $w \in W$, on associe une permutation $\sigma \in S_r$ telle que $w(\varepsilon_j) = \pm \varepsilon_{\sigma(j)}$. Réciproquement, toute transformation de cette forme définit un élément de W . Ainsi W est un produit semi-direct de S_r par $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^r$.

Enfin en caractéristique zéro on a $\Lambda^i V = L(\omega_i) \oplus L(\omega_{i-2}) \oplus \dots$ pour tout $i \leq r$.

1.2.2 Groupe spécial orthogonal impair

Soit $G = \text{SO}(2r + 1)$. On note $(z_1, \dots, z_r, z_0, z_{-r}, \dots, z_{-1})$ une base de V telle que $q(c_r z_r + \dots + c_0 z_0 + \dots + c_{-r} z_{-r}) = c_r c_{-r} \dots + c_1 c_{-1} + c_0^2$.

Une matrice diagonale $\text{diag}(h_1, h_2, \dots, h_r, h_0, h_{-r}, \dots, h_{-1})$ est dans H si et seulement si $h_0 = 1$ et $h_j h_{-j} = 1$ pour tout j .

Les racines positives (resp. simples) sont les $(\varepsilon_i \pm \varepsilon_j)_{1 \leq i < j \leq r}$ et les $(\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq r}$ (resp. $(\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1})_{1 \leq i < r}$ et ε_r). Les poids fondamentaux sont $\omega_1 = \varepsilon_1, \omega_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \dots, \omega_{r-1} = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_{r-1}, \omega_+ = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_r)$.

La description des poids, des poids dominants, des diagrammes de Young et du groupe de Weyl est la même que pour le groupe symplectique.

En caractéristique impaire ou nulle, on a $L(\omega_i) = \Lambda^i V$ si $i < r$ et $L(2\omega_+) = \Lambda^r V$: ce résultat a été démontré par Wong [47], et on peut aussi simplement constater que la démonstration de ([7], chapitre VI, paragraphe 5.4) reste valable en caractéristique p .

1.2.3 Groupe spécial orthogonal pair

Soit $G = \text{SO}(2r)$. On note $(z_1, \dots, z_r, z_{-r}, \dots, z_{-1})$ une base de V telle que $q(c_r z_r + \dots + c_{-r} z_{-r}) = c_r c_{-r} \dots + c_1 c_{-1}$.

Une matrice diagonale $\text{diag}(h_1, h_2, \dots, h_r, h_{-r}, \dots, h_{-1})$ est dans H si et seulement si $h_j h_{-j} = 1$ pour tout j .

Les racines positives (resp. simples) sont les $(\varepsilon_i \pm \varepsilon_j)_{1 \leq i < j \leq r}$ (resp. $(\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1})_{1 \leq i < r}$ et $\varepsilon_{r-1} + \varepsilon_r$). Les poids fondamentaux sont $\omega_1 = \varepsilon_1, \dots, \omega_{r-2} = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_{r-2}, \omega_- = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \dots - \varepsilon_r), \omega_+ = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_r)$.

Tout poids λ s'écrit $\lambda = \sum_{i=1}^r \lambda_i \varepsilon_i$, avec les λ_i entiers, et λ est dominant si et seulement si $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq |\lambda_r|$. On associe à $\lambda \in P^+$ le diagramme de Young $Y(\lambda)$ avec λ_1 boîtes sur la première ligne, λ_2 boîtes sur la seconde ligne, \dots , $|\lambda_r|$ boîtes sur la ligne r .

Soit $w \in W$ et $\sigma \in S_r$ telle que $w(\varepsilon_j) = \pm \varepsilon_{\sigma(j)}$. Alors le nombre de $j \leq r$ tels que $w(\varepsilon_j) = -\varepsilon_{\sigma(j)}$ est pair, et réciproquement une telle transformation définit un élément de W . Le groupe W est donc un produit semi-direct de S_r par $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{r-1}$.

En caractéristique impaire ou nulle, on a $L(\omega_i) = \Lambda^i V$ si $i < r-1$, $L(\omega_- + \omega_+) = \Lambda^{r-1} V$ et $L(2\omega_+) \oplus L(2\omega_-) = \Lambda^r V$, avec la même justification que dans le cas précédent.

1.2.4 Groupes spin

On considère les groupes $\text{Spin}(V)$ avec $\dim V = 2r$ ou $2r+1$. Soit $\chi : \text{Spin}(V) \rightarrow \text{SO}(V)$ la représentation naturelle de $\text{Spin}(V)$. Le tore et le sous-groupe de Borel positif de $\text{Spin}(V)$ sont les images réciproques par χ de ceux de $\text{SO}(V)$. Un poids $\lambda = \sum_{i=1}^r \lambda_i \varepsilon_i$ de $\text{Spin}(V)$ est dit entier (resp. demi-entier) si tous les λ_i sont dans \mathbb{Z} (resp. $\mathbb{Z} + \frac{1}{2}$). Tout poids de $\text{Spin}(V)$ est entier ou demi-entier, et les poids entiers sont identifiés aux poids de $\text{SO}(V)$. Lorsque λ est dominant et demi-entier, on lui associe le diagramme de Young $Y(\lambda)$ avec $\lambda_1 - \frac{1}{2}$ boîtes sur la première ligne, $\lambda_2 - \frac{1}{2}$ boîtes sur la seconde ligne, \dots , $|\lambda_r| - \frac{1}{2}$ boîtes sur la ligne r .

Il nous reste à définir la représentation spin S de $\text{Spin}(V)$. Si $\dim V$ est paire, notons S l'unique module simple de $\text{Cliff}(V)$. Comme $\text{Pin}(V)$ engendre $\text{Cliff}(V)$, S est une représentation irréductible de $\text{Pin}(V)$, et on verra dans la section suivante qu'elle est somme directe de deux représentations irréductibles de $\text{Spin}(V)$, notées S^+ et S^- . On peut expliciter ces deux représentations. Soient (z_1, \dots, z_{-1}) la base définie précédemment pour $\text{SO}(V)$, V_- le sous-espace de V engendré par (z_{-1}, \dots, z_{-r}) et V_+ celui engendré par (z_1, \dots, z_r) . D'après le théorème 1.8, S s'identifie à ΛV_- , et on montre que si on pose $z_I = z_{i_1} \wedge \dots \wedge z_{i_k}$ pour tout $I = \{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, r\}$, alors z_I est de poids $\frac{1}{2}(-\sum_{j \in -I} \varepsilon_j + \sum_{j \notin -I} \varepsilon_j)$. On en déduit que la partie paire $\oplus_i \Lambda^{2i} V_-$ (resp. impaire $\oplus_i \Lambda^{2i+1} V_-$) de ΛV_- est la représentation S^+ (resp. S^-) de plus haut poids ω_+ (resp. ω_-).

1.3. GROUPES CLASSIQUES NON CONNEXES

Si $\dim V$ est impaire, on note S l'unique module simple de $\text{Cliff}_+(V)$, qui est aussi une représentation irréductible de $\text{Spin}(V)$. Si on note V_- le sous-espace engendré par (z_{-1}, \dots, z_{-r}) , S s'identifie à ΛV_- , z_I est de poids $\frac{1}{2}(-\sum_{j \in -I} \varepsilon_j + \sum_{j \notin -I} \varepsilon_j)$, et S est la représentation de plus haut poids ω_+ .

On peut se représenter les représentations spin comme des “racines carrées” de l'algèbre extérieure de V : si $\dim V$ est paire (resp. impaire), il est clair que $S^{\otimes 2}$ (resp. $S^{\otimes 2} \oplus S^{\otimes 2}$) et ΛV ont même caractère, et elles sont en fait isomorphes (cf. [10]).

1.3 Groupes classiques non connexes

Pour ce chapitre, l'article de Digne et Michel [12] ainsi que [7] sont de bonnes références. Dans ce paragraphe, on considère $G = \text{Pin}(2r)$, $\text{O}(2r)$ ou $\text{O}(2r + 1)$, on note G^0 la composante neutre de G , et la composante connexe $G \setminus G^0$ est appelée seconde composante connexe. On définit les analogues des sous-groupes usuels, on décrit les représentations irréductibles de G et on conclut en rappelant une formule donnant les caractères irréductibles de $\text{O}(2r)$ sur sa seconde composante connexe.

1.3.1 Sous-groupes remarquables

Il nous faut expliquer ce que nous appellerons tore, Borel, etc. Rappelons les définitions suivantes de Digne et Michel. On fixe un groupe algébrique linéaire G sur K .

Définition 1.11 [12] *Soit $H \subset B$ un couple formé d'un tore maximal de G^0 et d'un sous-groupe de Borel le contenant. On appelle “Borel” de G le groupe $B_e = N_G(B)$ et “tore” de G le groupe $H_e = N_G(H, B)$.*

Définition 1.12 [12] *Un élément de G est dit quasi-semi-simple s'il induit par conjugaison un automorphisme de G^0 qui stabilise un couple formé d'un tore maximal de G^0 et d'un sous-groupe de Borel le contenant.*

Un élément de G est donc quasi-semi-simple si et seulement si il est dans un “tore”. On montre (cf. [12]) que tout élément semi-simple de G est dans un “tore” de G , et l'action par conjugaison de G^0 est transitive sur les couples $H_e \subset B_e$ formés d'un “tore” et d'un “Borel” de G . Pour calculer le caractère d'une représentation rationnelle de G , on peut donc se restreindre à un “tore” particulier, ce qu'on fera dans la dernière section du chapitre.

On définit un élément quasi-semi-simple σ pour chacun des trois groupes $\text{Pin}(2r)$, $\text{O}(2r)$ et $\text{O}(2r + 1)$. Soit (z_1, \dots, z_{-1}) la base définie précédemment pour $\text{SO}(2r)$ ou $\text{SO}(2r + 1)$. Si $G = \text{O}(2r)$, on note σ l'élément d'ordre 2 de $\text{O}(2r) \setminus \text{SO}(2r)$ défini par $\sigma(z_i) = z_i$ pour tout $i \neq \pm r$ et $\sigma(z_i) = z_{-i}$ si $i = \pm r$. Si $G = \text{Pin}(2r)$, σ désigne un élément de la seconde composante connexe de $\text{Pin}(2r)$ tel que $\chi(\sigma) = \sigma \in \text{O}(2r)$, χ étant la projection canonique de $\text{Pin}(2r)$ sur $\text{O}(2r)$. Enfin Si $G = \text{O}(2r + 1)$, on

définit σ par $\sigma(z_i) = z_i$ pour tout $i \neq 0$ et $\sigma(z_0) = -z_0$. Considérons le tore maximal H et le sous-groupe de Borel B définis dans les paragraphes précédents. On voit facilement que ce couple est stabilisé par σ qui est donc quasi-semi-simple. On note H_e le “tore” engendré par H et σ et B_e le “Borel” engendré par B et σ . Notons que le radical unipotent de B_e est le même que celui de B .

1.3.2 Représentations : théorie de Clifford

On étudie maintenant les représentations d’un groupe algébrique non connexe G dont la composante neutre G^0 est un sous-groupe d’indice deux de G , en reprenant les résultats énoncés dans [2] et [7]. Soit σ un élément fixé de $G \setminus G^0$. Lorsque G est l’un des trois groupes classiques qui nous intéressent, σ n’est autre que l’élément quasi-semi-simple défini ci-dessus. A toute représentation M de G^0 , on associe la représentation M_σ (M tordue par σ) de G^0 définie par $g \cdot u = \sigma g \sigma^{-1} u$ pour tous $g \in G^0$ et tous $u \in M$. Notons que la représentation M_σ est indépendante du choix de σ puisque G^0 est supposé d’indice deux dans G . A toute représentation N de G , on associe la représentation $N_\Omega = N \otimes \Omega$ de G , où Ω est la représentation de dimension 1 de G telle que tout $g \in G \setminus G^0$ (resp. tout $g \in G^0$) agit par multiplication par -1 (resp. agit trivialement). Ces deux opérations sont évidemment involutives et transforment les représentations irréductibles en représentations irréductibles. En outre il est évident que $\text{Res}_{G^0}^G N = \text{Res}_{G^0}^G N_\Omega$ et $\text{Ind}_{G^0}^G M = \text{Ind}_{G^0}^G M_\sigma$ pour toutes représentations M de G^0 et N de G .

Théorème 1.13 (Clifford) *1. Si M est une représentation irréductible de G^0 et $M \simeq M_\sigma$, on a $\text{Ind}_{G^0}^G M = N \oplus N_\Omega$, où N est une représentation irréductible de G telle que $N \not\simeq N_\Omega$ et $\text{Res}_{G^0}^G N = M$.*

2. Si N est une représentation irréductible de G et $N \not\simeq N_\Omega$, $\text{Res}_{G^0}^G N$ est une représentation irréductible M de G^0 telle que $M \simeq M_\sigma$ et $\text{Ind}_{G^0}^G M = N \oplus N_\Omega$.

3. Si M est une représentation irréductible de G^0 et $M \not\simeq M_\sigma$, $\text{Ind}_{G^0}^G M$ est une représentation irréductible N de G telle que $N \simeq N_\Omega$ et $\text{Res}_{G^0}^G N = M \oplus M_\sigma$.

4. Si N est une représentation irréductible de G et $N \simeq N_\Omega$, on a $\text{Res}_{G^0}^G N = M \oplus M_\sigma$, où M est une représentation irréductible de G^0 telle que $M \not\simeq M_\sigma$ et $\text{Ind}_{G^0}^G M = N$.

Le théorème peut se reformuler en disant qu’on a une correspondance “une à deux” et “deux à une” entre les représentations irréductibles de G et de G^0 .

Explicitons l’action de σ sur les représentations de G^0 lorsque $G = \text{Pin}(2r)$, $\text{O}(2r)$ ou $\text{O}(2r + 1)$. Suivant le cas, G^0 est $\text{Spin}(2r)$, $\text{SO}(2r)$ ou $\text{SO}(2r + 1)$. On voit facilement que si v est de poids λ sous H , alors σv est de poids $\tau(\lambda)$, où $\tau(\lambda_1 \varepsilon_1 + \dots + \lambda_{r-1} \varepsilon_{r-1} + \lambda_r \varepsilon_r) = \lambda_1 \varepsilon_1 + \dots + \lambda_{r-1} \varepsilon_{r-1} - \lambda_r \varepsilon_r$ si $G \neq \text{O}(2r + 1)$, et τ est l’identité si $G = \text{O}(2r + 1)$. On en déduit que $L(\lambda)_\sigma = L(\tau(\lambda))$ pour tout poids dominant λ de G^0 . Autrement dit, l’action de σ sur les représentations irréductibles

1.3. GROUPES CLASSIQUES NON CONNEXES

de G^0 correspond à l'automorphisme du diagramme de Dynkin de G^0 . Remarquons que lorsque $G = \mathrm{O}(2r)$ ou $\mathrm{O}(2r + 1)$, Ω n'est autre que le déterminant.

Appliquons maintenant le théorème précédent au groupe non connexe H_e : si λ est un poids de G^0 et $\tau(\lambda) = \lambda$, on a une représentation irréductible de H_e qui est la droite de poids λ où σ agit trivialement, et une autre représentation irréductible de H_e qui est la droite de poids λ où σ agit par multiplication par -1 . Si λ est un poids de G^0 et $\tau(\lambda) \neq \lambda$, on a une représentation irréductible de H_e qui est la somme directe d'une droite de poids λ et d'une droite de poids $\tau(\lambda)$, σ agissant par permutation de ces droites. On obtient ainsi toutes les représentations irréductibles de H_e . Ceci nous mène aux définitions suivantes.

Définition 1.14 *Soit λ un poids de G^0 tel que $\tau(\lambda) = \lambda$ et soit $s \in \{+, -\}$. Un vecteur de poids λ sous H est dit de poids (λ, s) sous H_e si σ agit trivialement (resp. par multiplication par -1) quand $s = +$ (resp. $s = -$). Si V est une représentation de G , on note $V_{(\lambda, s)}$ le sous-espace des vecteurs de poids (λ, s) .*

Définition 1.15 *Si λ est un poids dominant de G^0 tel que $\tau(\lambda) \neq \lambda$ et $\lambda_n > 0$, on dit que λ est un poids dominant de G . Si λ est un poids dominant de G^0 tel que $\tau(\lambda) = \lambda$ et si on a $s = \pm$, on dit que (λ, s) est un poids dominant de G . Le diagramme de Young d'un poids dominant de G est le diagramme du poids dominant de G^0 sous-jacent.*

On introduit quelques notations pour désigner les représentations irréductibles de $G = \mathrm{Pin}(2r)$, $\mathrm{O}(2r)$ ou $\mathrm{O}(2r + 1)$. Soit λ un poids dominant de G^0 tel que $\lambda_n \geq 0$. Si $\tau(\lambda) \neq \lambda$, c'est-à-dire $G \neq \mathrm{O}(2r + 1)$ et $\lambda_r \neq 0$, on désigne par $L(\lambda, 0)$ la représentation irréductible de G qui est la somme directe vectorielle des représentations irréductibles $L(\lambda)$ et $L(\tau(\lambda))$ de G^0 . Il est important de noter que les seules représentations de $\mathrm{Pin}(2r)$ que nous aurons à considérer seront de ce type. Si $G = \mathrm{O}(2r)$ et $\lambda_r = 0$, ou si $G = \mathrm{O}(2r + 1)$, on note $L(\lambda, -)$ et $L(\lambda, +)$ les représentations irréductibles distinctes de G qui, restreintes à G^0 , sont égales à la représentation irréductible $L(\lambda)$ de G^0 . La représentation $L(\lambda, +)$ est celle où σ agit trivialement sur le vecteur de plus haut poids, et σ agit par multiplication par -1 sur le vecteur de plus haut poids de $L(\lambda, -)$. D'après ce qui précède, les représentations irréductibles de G sont en bijection avec les poids dominants de G . Remarquons qu'on n'introduit pas de notation pour l'ensemble des poids dominants de G , P^+ désignera donc toujours le cône des poids dominants de G^0 .

Exemple 1.16 Supposons V de dimension paire, et soit S l'unique $\mathrm{Cliff}(V)$ -module simple. Comme $\mathrm{Pin}(V)$ -module, on a $S = L(\omega_+, 0)$ et comme $\mathrm{Spin}(V)$ -module, on a $S = L(\omega_+) \oplus L(\omega_-)$.

Si $G = \mathrm{O}(2r + 1)$, on peut écrire G comme un produit direct de G^0 par le groupe à deux éléments, plutôt que comme un produit semi-direct : il suffit de remplacer σ par l'élément central $\sigma_c = -\mathrm{id}$. Il est clair que tout ce qui vient d'être dit sur les

représentations de $O(2r + 1)$ reste valable avec σ_c , et l'action de σ_c sur un G -module M indécomposable est particulièrement simple : Notons $\overline{\sigma}_c$ le G -endomorphisme de M défini par l'action de σ_c sur M . On a $\overline{\sigma}_c^2 = \text{id}$, et comme la caractéristique est impaire ou nulle, le polynôme minimal de $\overline{\sigma}_c$ est à racines simples, $\overline{\sigma}_c$ est diagonalisable, les valeurs propres valent ± 1 , et le lemme de Fitting montre qu'il y a une seule valeur propre. Ainsi $\overline{\sigma}_c = \pm \text{id}$. Ce résultat facilite notamment les calculs de produits tensoriels de représentations, et on peut modifier sans difficulté les formules ainsi obtenues pour trouver la décomposition sous σ en remarquant que $\sigma = \sigma_c h_c$, où h_c est l'élément du tore de $SO(2r + 1)$ tel que $\varepsilon_i(h_c) = -1$ pour tout i . Par conséquent, et sauf mention du contraire, on décomposera dans la suite les produits tensoriels des représentations de $O(2r + 1)$ sous l'action de σ_c .

1.3.3 Caractères irréductibles de $O(2r)$

On suppose ici que $K = \mathbb{C}$ et $G = O(2r)$. Sous ces hypothèses, on dispose d'une formule donnant le caractère d'une représentation irréductible de G sur la seconde composante connexe σG^0 de G . Cette formule combinée à la formule des caractères de Weyl permet notamment de déterminer les dimensions des sous-espaces de poids de $L(\lambda, \pm)$ sous $O(2r)$.

Définition 1.17 *Soit λ un poids dominant de $SO(2r)$ et $s \in \{+, -, 0\}$. On pose*

$$\chi^\sigma L(\lambda, s) = \sum_{\mu_r = 0}^{\mu} (\dim L(\lambda, s)_{(\mu,+)} - \dim L(\lambda, s)_{(\mu,-)}) e^\mu.$$

Vérifions que χ^σ est la définition adéquate du caractère de $N = L(\lambda, s)$ sur $\sigma SO(2r)$. D'après les remarques faites dans la section 1.3.1, il suffit de déterminer le caractère de N sur $H_e \cap \sigma G^0 = \sigma H$. Pour tout $h = \text{diag}(h_1, h_2, \dots, h_r, h_{-r}, \dots, h_{-1})$ élément du tore H de $SO(2r)$ et tout poids $\mu = \sum_{i=1}^r \mu_i \varepsilon_i$ de H , on pose $e^\mu(h) = \prod_{i=1}^r h_i^{\mu_i}$. Si un poids μ de H vérifie $\mu_r \neq 0$, alors la trace de σh restreinte au sous-espace de poids μ de N est nulle, puisque σ envoie le sous-espace de poids μ sur le sous-espace de poids $\tau(\mu)$. Si $\mu_r = 0$ et v est un vecteur de poids $(\mu, +)$ (resp. $(\mu, -)$), la trace de σh sur la droite $\mathbb{C}v$ vaut $e^\mu(h)$ (resp. $-e^\mu(h)$). D'après ce qui précède, pour tout $h \in H$, la valeur du caractère de N en σh est bien égale à $\chi^\sigma N(h)$.

On veut maintenant déterminer $\chi^\sigma L(\lambda, s)$. Si $\lambda_r \neq 0$, autrement dit si $s = 0$, il est clair que $\chi^\sigma L(\lambda, 0) = 0$ puisque $L(\lambda, 0) = L(\lambda, 0) \otimes \det$ et $\chi^\sigma \det = -1$. Si $\lambda_r = 0$, on se réduit au cas où $s = +$. On identifie $\text{diag}(h_1, \dots, 1, 1, \dots, h_{-1}) \in H_\sigma^0$ à $\text{diag}(h_1, \dots, h_{-1})$, élément du tore de $\text{Sp}(2r - 2)$, et pour tout poids μ tel que $\mu_r = 0$, $\sum_{i < r} \mu_i \varepsilon_i$ est un poids de $\text{Sp}(2r - 2)$ qu'on note toujours μ .

Avec ces conventions, on obtient le théorème qui suit, démontré au chapitre 5. Remarquons que Jantzen ([26], partie I, paragraphe 9) en a obtenu une version plus générale valable pour les produits semi-directs du groupe à deux éléments avec un groupe de type A , D ou E_6 . Pour un groupe de type D , Jantzen signale que ce résultat remonte à Weyl. Plus précisément, dans le paragraphe 9 du chapitre VII de [44], on peut lire page 227 "Les sommes élémentaires $\xi^-(l_1, \dots, l_{\nu-1})$ sont comme

1.3. GROUPES CLASSIQUES NON CONNEXES

celles du groupe symplectique (...) $\chi^- = \frac{\xi^-(l_1, \dots, l_{\nu-1})}{\xi^-(l_1^0, \dots, l_{\nu-1}^0)}$, χ^- étant le caractère sur la seconde composante connexe de $O(2r)$.

Théorème 1.18 ([26], [43] ou [44]) *Soit $K = \mathbb{C}$ et soit λ un poids dominant de $SO(2r)$ tel que $\lambda_r = 0$. On a*

$$\chi^\sigma L(\lambda, +) = \text{ch } L^{(2r-2)}(\lambda)$$

où $L^{(2r-2)}(\lambda)$ est la représentation irréductible de $\text{Sp}(2r-2)$ de plus haut poids λ .

Remarquons que ce théorème est faux en caractéristique p . En effet on a signalé qu'en toute caractéristique $L(\omega_+ + \omega_-, +) = \Lambda^{r-1}V$, par conséquent $\chi^\sigma L(\omega_+ + \omega_-, +)$ ne dépend pas de la caractéristique, alors que $\text{ch } L^{(2r-2)}(\omega_{r-1})$ en dépend : il résulte du théorème 8.7 du dernier chapitre que la dimension de $L^{(2r-2)}(\omega_{r-1})$ en caractéristique p est égale à la dimension de $L^{(2r-2)}(\omega_{r-1})$ en caractéristique zéro si et seulement si $p \geq 1 + \frac{r}{2}$.

CHAPITRE 1. ALGÈBRE DE CLIFFORD ET GROUPES CLASSIQUES

Chapitre 2

Produits tensoriels en caractéristique zéro

Dans ce chapitre, le corps de base est \mathbb{C} . Le but de ce chapitre est un énoncé technique, à savoir le calcul de la décomposition des produits tensoriels $\Lambda^l V \otimes L(\beta)$ sous l'action de $G = \mathrm{Sp}(2n), \mathrm{Spin}(2n+1), \mathrm{Pin}(2n), \mathrm{O}(2n+1)$ et $\mathrm{O}(2n)$, V étant la représentation naturelle de G et β un poids dominant de G .

On commence par définir l'opérateur de Weyl, en s'inspirant de la formule des caractères de Weyl, et on rappelle ses propriétés essentielles. Puis on l'utilise pour obtenir la décomposition annoncée, exprimée en termes de boîtes ajoutées et retranchées au diagramme de Young $Y(\beta)$. On procède d'abord à la démonstration dans le cas des groupes connexes, la démonstration s'inspirant de la formule de Klimyk [29]. On en déduit facilement le résultat pour les groupes non connexes $\mathrm{Pin}(2n)$ et $\mathrm{O}(2n+1)$. Le traitement du groupe orthogonal pair pose certaines difficultés, résolues par l'emploi du théorème 1.18. On termine ce chapitre par la traduction de cette combinatoire en termes de tableaux sur des diagrammes gauches.

Au chapitre 5, on verra comment combiner les résultats de ce chapitre à ceux du chapitre 4 sur les paires duales de groupes, pour retrouver les expressions combinatoires des caractères irréductibles des groupes classiques en caractéristique zéro.

2.1 Opérateur de Weyl

Soit G un groupe algébrique simple connexe défini sur \mathbb{C} . On choisit un tore maximal et un sous-groupe de Borel le contenant. On note P le réseau des poids de G , P^+ le cône des poids dominants, W le groupe de Weyl de G , $\rho \in \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} P$ la demi-somme des racines positives et $\mathbb{Z}[P]$ l'algèbre du groupe P , de \mathbb{Z} -base $(e^\mu)_{\mu \in P}$. On définit une action de W sur $\mathbb{Z}[P]$ par $w(e^\mu) = e^{w(\mu)}$ pour tout $w \in W$ et tout $\mu \in P$ et on note $\mathbb{Z}[P]^W$ le sous-groupe des éléments de $\mathbb{Z}[P]$ invariants sous l'action de W .

On définit également l'action pointée de W sur $\mathbb{Z}[P]$ (resp. P) par $w \cdot e^\lambda = e^{w(\lambda+\rho)-\rho}$ (resp. $w \cdot \lambda = w(\lambda + \rho) - \rho$) pour tout $w \in W$ et tout $\lambda \in P$. Pour toute

CHAPITRE 2. PRODUITS TENSORIELS EN CARACTÉRISTIQUE ZÉRO

racine positive α , on note h_α sa coracine et s_α la réflexion associée à α , et on dit qu'un poids λ est singulier s'il existe une racine α telle que $s_\alpha \cdot \lambda = \lambda$, c'est-à-dire $\lambda(h_\alpha) = -1$. On prendra garde qu'il ne s'agit pas de la définition classique de poids singulier, qu'on peut trouver dans le livre de Humphreys [23] par exemple, car on considère l'action pointée du groupe de Weyl.

Définition 2.1 *On appelle opérateur de Weyl le morphisme de groupes $\chi : \mathbb{Z}[P] \rightarrow \mathbb{Z}[P]^W$ défini par*

$$\chi(e^\lambda) = \frac{\sum_{w \in W} \varepsilon(w) e^{w(\lambda + \rho)}}{\sum_{w \in W} \varepsilon(w) e^{w\rho}}$$

pour tout $\lambda \in P$.

On rappelle dans la proposition qui suit les propriétés bien connues de l'opérateur de Weyl, qu'on peut trouver dans l'ouvrage de Jantzen ([25], II.5).

Proposition 2.2 1. $\chi(e^\lambda) = \text{ch}(L(\lambda))$ pour tout $\lambda \in P^+$.

2. $\chi(BA) = B\chi(A)$ pour tout $A \in \mathbb{Z}[P]$ et tout $B \in \mathbb{Z}[P]^W$.

3. $\chi(w \cdot A) = \varepsilon(w)\chi(A)$ pour tout $w \in W$ et tout $A \in \mathbb{Z}[P]$.

4. $\chi(e^\lambda) = 0$ si et seulement si λ est singulier.

Démonstration. Le premier point est le seul non trivial, puisqu'il s'agit de la formule des caractères de Weyl. Les points 2. et 3. sont clairs si $A = e^\lambda$ avec λ dans P , et on étend par linéarité. Pour démontrer le point 4., remarquons que si λ est singulier, il existe une racine α telle que $s_\alpha(\lambda + \rho) = \lambda + \rho$. On a alors d'après 3. : $\chi(e^\lambda) = \chi(e^{s_\alpha \cdot \lambda}) = -\chi(e^\lambda)$, d'où $\chi(e^\lambda) = 0$. Réciproquement, si λ est non singulier, il existe $w \in W$ tel que $\mu = w \cdot \lambda$ soit dominant et, toujours d'après 3., $\chi(e^\lambda) = \pm \chi(e^{w \cdot \lambda}) = \pm \text{ch } L(\mu) \neq 0$. \square

A titre d'application, on montre comment retrouver la formule de Klimyk [29] grâce à l'opérateur de Weyl. Notons que le principe de la démonstration est le même que pour la proposition 2.3 dans la section suivante. Soient λ, μ deux poids dominants, et supposons qu'on connaisse le caractère de $L(\mu)$, donné par $\text{ch } L(\mu) = \sum_i m_i e^{\gamma_i}$. On en déduit alors la décomposition de $L(\lambda) \otimes L(\mu)$ en somme directe de représentations irréductibles : on a $\text{ch } L(\lambda) \otimes L(\mu) = \chi(e^\lambda) \sum_i m_i e^{\gamma_i} = \chi(\sum_i m_i e^{\gamma_i + \lambda}) = \sum_i m_i \chi(e^{\gamma_i + \lambda})$. Lorsque $\gamma_i + \lambda$ n'est pas singulier, on note w_i l'unique élément de W tel que $\delta_i = w_i \cdot (\gamma_i + \lambda)$ soit dominant, et on trouve finalement $\text{ch } L(\lambda) \otimes L(\mu) = \sum_i m_i \varepsilon(w_i) \text{ch } L(\delta_i)$. Remarquons que la preuve originelle de Klimyk est essentiellement la même.

2.2 La décomposition fondamentale

La proposition qui suit donne la décomposition de $\Lambda^l V \otimes L(\beta)$ sous l'action de $G^0 = \mathrm{Sp}(2n), \mathrm{Spin}(2n+1), \mathrm{Spin}(\cdot), \mathrm{SO}(2n+1)$ et $\mathrm{SO}(2n)$. Remarquons que certaines de ces formules se trouvent déjà dans [45].

Proposition 2.3 *Soit $0 \leq l \leq \dim V$ et $\beta \in P^+$ avec $\beta_n \geq 0$. Si $G^0 = \mathrm{Spin}(V)$, on suppose que β est demi-entier. On a alors la décomposition*

$$\Lambda^l V \otimes L(\beta) = \bigoplus_{(\delta, \gamma)} L(\gamma)$$

où les couples (δ, γ) vérifient :

1. On a $\delta = \beta + \phi \in P^+$ où ϕ est une somme de ε_i deux à deux distincts.
2. On a $\gamma = \beta + \phi - \psi \in P^+$ où ψ est une somme de ε_j deux à deux distincts.
3. Soit h le nombre de termes de ϕ et k celui de ψ .
Si $G^0 \neq \mathrm{Spin}(2n+1), \mathrm{SO}(2n+1)$, on a $h + k = l$.
Si $G^0 = \mathrm{Spin}(2n+1)$ ou $\mathrm{SO}(2n+1)$, on a $h + k = l$ ou $h + k = l - 1$.
4. Si $G^0 = \mathrm{SO}(2n)$ ou $\mathrm{SO}(2n+1)$, on dit que (δ, γ) réalise $(*)$ pour i si $\beta_i = 0$ et ε_i est un terme de ϕ et de ψ . Avec cette définition, on a :
 - (a) si $G^0 = \mathrm{SO}(2n)$, (δ, γ) réalise $(*)$ pour n ou il ne réalise $(*)$ pour aucun i .
 - (b) si $G^0 = \mathrm{SO}(2n+1)$ et $h + k = l$ alors (δ, γ) ne réalise $(*)$ pour aucun i .
 - (c) si $G^0 = \mathrm{SO}(2n+1)$, $h + k = l - 1$ et $\beta_n = 0$, alors ε_n est un terme de ϕ .

Les deux premières conditions s'énoncent facilement en termes de diagrammes : on ajoute au plus une boîte par ligne au diagramme de β de manière à obtenir un diagramme de Young (celui de δ), puis on retranche au plus une boîte par ligne au diagramme précédemment construit de manière à obtenir un diagramme de Young (celui de γ).

Démonstration. Soit (z_1, \dots, z_n) la base de V définie au chapitre précédent. Si on a $G^0 \neq \mathrm{Spin}(2n+1), \mathrm{SO}(2n+1)$, on note \mathcal{B} la base de $\Lambda^l V$ formée des vecteurs $v = z_{i_1} \wedge \dots \wedge z_{i_r} \wedge z_{-j_1} \wedge \dots \wedge z_{-j_s}$ avec $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n, 1 \leq j_1 < \dots < j_s \leq n$ et $r + s = l$. Si $G^0 = \mathrm{Spin}(2n+1)$ ou $\mathrm{SO}(2n+1)$, \mathcal{B} est formée des vecteurs $v = z_{i_1} \wedge \dots \wedge z_{i_r} \wedge z_{-j_1} \wedge \dots \wedge z_{-j_s}$ avec $r + s = l$, ce qu'on indique par la notation $z_0 \not\vdash v$, et des vecteurs $v = z_0 \wedge z_{i_1} \wedge \dots \wedge z_{i_r} \wedge z_{-j_1} \wedge \dots \wedge z_{-j_s}$ avec $r + s = l - 1$, désignés par $z_0 \vdash v$.

Pour tout $v \in \mathcal{B}$, soit $\phi(v) = \varepsilon_{i_1} + \dots + \varepsilon_{i_r}$ et $\psi(v) = \varepsilon_{j_1} + \dots + \varepsilon_{j_s}$. Le poids de v est alors $\phi(v) - \psi(v)$, et tout élément v de \mathcal{B} est déterminé par la connaissance de $\phi(v)$ et $\psi(v)$ si $G^0 \neq \mathrm{Spin}(2n+1), \mathrm{SO}(2n+1)$. Remarquons que pour tout $v \in \mathcal{B}$ et toute racine simple α , on a $-1 \leq \phi(v)(h_\alpha) \leq 2$ et $-1 \leq \psi(v)(h_\alpha) \leq 2$. On pose

CHAPITRE 2. PRODUITS TENSORIELS EN CARACTÉRISTIQUE ZÉRO

enfin $\mathcal{B}_1 = \{v \in \mathcal{B} \mid \beta + \phi(v) \in P^+, \beta + \phi(v) - \psi(v) \in P^+\}$. D'après la proposition 2.2, on a

$$\begin{aligned} \text{ch } \Lambda^l V \otimes L(\beta) &= \text{ch } \Lambda^l V \text{ ch } L(\beta) \\ &= \left(\sum_{v \in \mathcal{B}} e^{\phi(v) - \psi(v)} \right) \chi(e^\beta) \\ &= \chi \left(\sum_{v \in \mathcal{B}} e^{\phi(v) - \psi(v)} e^\beta \right) \\ &= \sum_{v \in \mathcal{B}} \chi(e^{\beta + \phi(v) - \psi(v)}) \\ &= S_1 + S_2 + S_3, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{v \in \mathcal{B}_1} \chi(e^{\beta + \phi(v) - \psi(v)}), \\ S_2 &= \sum_{\substack{v \in \mathcal{B}, \\ \beta + \phi(v) \in P^+ \\ \beta + \phi(v) - \psi(v) \notin P^+}} \chi(e^{\beta + \phi(v) - \psi(v)}), \\ S_3 &= \sum_{\substack{v \in \mathcal{B}, \\ \beta + \phi(v) \notin P^+}} \chi(e^{\beta + \phi(v) - \psi(v)}). \end{aligned}$$

Lorsque $G^0 \neq \text{SO}(2n), \text{SO}(2n+1)$, la preuve de la proposition se fait comme suit : on voit que tous les termes de S_2 sont nuls et que chaque terme non nul de S_3 s'élimine avec un autre terme de S_3 . Il ne subsiste alors que la somme S_1 qui donne les formules annoncées.

La somme S_3 est nulle pour chacun des cinq groupes considérés. Pour le voir, fixons μ non dominant, posons $\mathcal{B}' = \{v \in \mathcal{B}, \beta + \phi(v) = \mu\}$ et montrons que la somme $S_\mu = \sum_{v \in \mathcal{B}'} \chi(e^{\beta + \phi(v) - \psi(v)})$ est nulle. Soit α une racine simple telle que $\mu(h_\alpha) \leq -1$. On peut supposer \mathcal{B}' non vide, et pour tout $v \in \mathcal{B}'$, comme $\phi(v)(h_\alpha) \geq -1$ et $\beta(h_\alpha) \geq 0$, on obtient $\beta(h_\alpha) = 0$ et $\mu(h_\alpha) = \phi(v)(h_\alpha) = -1$. En particulier μ est invariant sous l'action pointée de s_α . On ne peut avoir $\alpha = \varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n$, $\alpha = 2\varepsilon_n$ ou $\alpha = \varepsilon_n$ car ceci impliquerait $\phi(v)(h_\alpha) \geq 0$. On a donc $\alpha = \varepsilon_q - \varepsilon_{q+1}$ pour un certain q , et l'action naturelle de s_α sur les poids est la transposition qui échange ε_q et ε_{q+1} . On définit une transformation analogue T_α sur \mathcal{B} , qui, dans l'écriture d'un élément de \mathcal{B} comme produit extérieur des z_i , échange z_{-q} et z_{-q-1} . La transformation T_α est une involution sur \mathcal{B} , et pour tout $v \in \mathcal{B}$, $T_\alpha(v)$ est de poids $\phi(v) - s_\alpha(\psi(v))$. Comme $s_\alpha \cdot e^{\mu - \psi(v)} = e^{s_\alpha(\mu - \psi(v) + \rho) - \rho} = e^{s_\alpha(\mu + \rho) - \rho} e^{s_\alpha(-\psi(v))} = e^\mu e^{s_\alpha(-\psi(v))} = e^{\mu - s_\alpha(\psi(v))} = e^{\mu - \psi(T_\alpha(v))}$, on a $\chi(e^{\mu - \psi(v)}) + \chi(e^{\mu - \psi(T_\alpha(v))}) = \chi(e^{\mu - \psi(v)}) + \chi(s_\alpha \cdot e^{\mu - \psi(v)}) = 0$ en vertu de 2.2. Par conséquent $2S_\mu = \sum_{v \in \mathcal{B}'} \chi(e^{\mu - \psi(v)}) + \sum_{v \in \mathcal{B}'} \chi(e^{\mu - \psi(T_\alpha(v))}) = 0$, d'où $S_\mu = 0$.

On s'intéresse maintenant à la somme S_2 . On suppose que $\beta + \phi(v) - \psi(v)$ n'est ni dominant, ni singulier. Alors il existe une racine simple α tel que $(\beta + \phi(v) -$

2.2. LA DÉCOMPOSITION FONDAMENTALE

$\psi(v)(h_\alpha) \leq -2$. Plusieurs cas sont à envisager :

1. Si $\alpha = \varepsilon_q - \varepsilon_{q+1}$, ceci implique $\beta(h_\alpha) = 0$, $\phi(v)(h_\alpha) = -1$ et $\psi(v)(h_\alpha) = 1$, et on en déduit que $\beta + \phi(v)$ est singulier.
2. On ne peut avoir $\alpha = 2\varepsilon_n$ car $\phi(v)(h_\alpha) \geq 0$ et $\psi(v)(h_\alpha) \leq 1$.
3. Si $\alpha = \varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n$ ou $\alpha = \varepsilon_n$, on a $\beta(h_\alpha) = 0$, $\phi(v)(h_\alpha) = 0$, $\psi(v)(h_\alpha) = 2$. Si $G^0 = \text{Spin}(2n)$ ou $\text{Spin}(2n+1)$, cela est impossible car $\beta_{n-1} \geq \beta_n \geq \frac{1}{2}$ contredit $\beta(h_\alpha) = 0$.

Pour voir que tous les termes de S_2 sont nuls lorsque G^0 est l'un des groupes $\text{Sp}(2n)$, $\text{Spin}(2n)$ ou $\text{Spin}(2n+1)$, il suffit de prouver que si $\beta + \phi(v) - \psi(v)$ n'est ni dominant, ni singulier, alors $\beta + \phi(v)$ n'est pas dominant, ce qui résulte de l'étude de cas qu'on vient de faire. La proposition est donc démontrée si $G^0 = \text{Sp}(2n)$, $\text{Spin}(2n)$ ou $\text{Spin}(2n+1)$.

On traite maintenant les cas $G^0 = \text{SO}(2n)$ ou $\text{SO}(2n+1)$. On suppose que $\beta + \phi(v) - \psi(v)$ n'est ni dominant, ni singulier et que $\beta + \phi(v)$ est dominant. Par ce qui précède, pour tout $q < n$ on a $(\beta + \phi(v) - \psi(v))(h_{\varepsilon_q - \varepsilon_{q+1}}) \not\leq -2$, donc $(\beta + \phi(v) - \psi(v))(h_{\varepsilon_q - \varepsilon_{q+1}}) \geq 0$ puisque le poids $\beta + \phi(v) - \psi(v)$ n'est pas singulier. On a aussi $\beta(h_\alpha) = 0$, $\phi(v)(h_\alpha) = 0$ et $\psi(v)(h_\alpha) = 2$ si $\alpha = \varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n$ et $G^0 = \text{SO}(2n)$ (resp. $\alpha = \varepsilon_n$ et $G^0 = \text{SO}(2n+1)$).

On pose désormais $\alpha = \varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n$ (resp. $\alpha = \varepsilon_n$) si $G^0 = \text{SO}(2n)$ (resp. $\text{SO}(2n+1)$) et on construit un poids dominant dans l'orbite de $\beta + \phi(v) - \psi(v)$ sous l'action pointée du groupe de Weyl. Soit $\eta = s_\alpha \cdot (\beta + \phi(v) - \psi(v)) = s_\alpha(\beta + \phi(v) - \psi(v) + \rho) - \rho = \beta + \phi(v) - \psi(v) + 2\alpha + \rho - \alpha - \rho = \beta + \phi(v) - \psi(v) + \alpha$. Le poids η n'est pas singulier puisque $\beta + \phi(v) - \psi(v)$ ne l'est pas. Par ailleurs on a établi que pour tout q , $(\eta - \alpha)(h_{\varepsilon_q - \varepsilon_{q+1}}) = (\beta + \phi(v) - \psi(v))(h_{\varepsilon_q - \varepsilon_{q+1}}) \geq 0$. On en déduit $\eta(h_{\varepsilon_q - \varepsilon_{q+1}}) \geq -1$, puis $\eta(h_{\varepsilon_q - \varepsilon_{q+1}}) \geq 0$ car η n'est pas singulier, et comme $\eta(h_\alpha) = 0$ on obtient que η est dominant. On a donc, en posant $I = \{v \in \mathcal{B} \mid \beta + \phi(v) \in P^+, \beta + \phi(v) - \psi(v) \text{ non dominant, non singulier}\}$:

$$\begin{aligned} \text{ch}(\Lambda^l V_2 \otimes L(\beta)) &= \sum_{v \in \mathcal{B}_1} \chi(e^{\beta + \phi(v) - \psi(v)}) + \sum_{v \in I} \chi(e^{\beta + \phi(v) - \psi(v)}) \\ &= \sum_{v \in \mathcal{B}_1} \chi(e^{\beta + \phi(v) - \psi(v)}) - \sum_{v \in I} \chi(e^{\beta + \phi(v) - \psi(v) + \alpha}) \\ &= \sum_{v \in \mathcal{B}_1} \text{ch} L(\beta + \phi(v) - \psi(v)) - \sum_{v \in I} \text{ch} L(\beta + \phi(v) - \psi(v) + \alpha). \end{aligned}$$

On a besoin d'une description différente de I . Considérons l'ensemble $I' = \{v \in \mathcal{B} \mid \beta + \phi(v) \in P^+, \beta + \phi(v) - \psi(v) + \alpha \in P^+, \beta(h_\alpha) = \phi(v)(h_\alpha) = 0, \psi(v)(h_\alpha) = 2\}$. Il contient I , et lui est en fait égal : pour tout $v \in I'$, on a $s_\alpha \cdot (\beta + \phi(v) - \psi(v) + \alpha) = \beta + \phi(v) - \psi(v)$ qui est donc non singulier, et $\beta + \phi(v) - \psi(v)$ n'est pas dominant puisque $(\beta + \phi(v) - \psi(v))(h_\alpha) = -2$. Si $\beta(h_\alpha) \neq 0$, I est vide et la proposition est démontrée.

CHAPITRE 2. PRODUITS TENSORIELS EN CARACTÉRISTIQUE ZÉRO

On suppose jusqu'à la fin de la démonstration que $\beta(h_\alpha) = 0$, et on dispose pour l'instant de l'équation

$$\text{ch}(\Lambda^l V_2 \otimes L(\beta)) = \sum_{v \in \mathcal{B}_1} \text{ch} L(\beta + \phi(v) - \psi(v)) - \sum_{v \in I} \text{ch} L(\beta + \phi(v) - \psi(v) + \alpha),$$

avec

$$v \in I \iff \begin{cases} v \in \mathcal{B} \\ \beta + \phi(v) \in P^+ \\ \beta + \phi(v) - \psi(v) + \alpha \in P^+ \\ \phi(v)(h_\alpha) = 0 \\ \psi(v)(h_\alpha) = 2 \end{cases}$$

On traite tout d'abord le groupe $\text{SO}(2n)$. Dans l'équation ci-dessus, on simplifie les termes de la somme indicée par I avec certains termes de la somme indicée par \mathcal{B}_1 en construisant une injection Γ de I dans \mathcal{B}_1 . Si $v \in I$, on constate que ε_{n-1} et ε_n sont des termes de $\psi(v)$, la somme du nombre de termes de $\phi(v)$ et de $(-\psi(v) + \alpha)$ vaut donc $l-2$, et non pas l comme on le souhaite. On ajoute donc un nouveau terme ε_{i+1} à $\phi(v)$ et on le retranche à $-\psi(v) + \alpha$, en faisant en sorte que $-\varepsilon_{i+1}$ ne soit pas déjà un terme de $-\psi(v) + \alpha$. Avant d'indiquer le choix de i , posons $r = \phi(v) + \varepsilon_{i+1}$, $s = \psi(v) + \varepsilon_{i+1} - \alpha$. On veut définir $v' = \Gamma(v) \in \mathcal{B}_1$ de telle sorte que $\phi(v') = r$ et $\psi(v') = s$, et on aura alors $L(\beta + \phi(v) - \psi(v) + \alpha) = L(\beta + \phi(v') - \psi(v'))$. On doit avoir $\beta + r$ dominant et il faut également que $\pm\varepsilon_{i+1}$ ne soit pas un terme de $\phi(v)$ ou de $\psi(v) - \alpha$. Le seul choix raisonnable est $i = \max\{j \mid (\beta + \phi(v))_j \neq 0\}$, et si $\beta + \phi(v) = 0$ on convient que $i = 0$. Remarquons que $i \leq n-2$ puisque $\beta(h_\alpha) = \phi(v)(h_\alpha) = 0$. Comme $\beta + \phi(v)$ est dominant, on a $\beta_j = 0$ et $\phi(v)_j = 0$ pour tout $j \geq i+1$. Par ailleurs $\beta + \phi(v) - \psi(v) + \alpha$ est dominant et $i+1 < n$, on a donc $(\beta + \phi(v) - \psi(v) + \alpha)_{i+1} \geq 0$, c'est-à-dire $(-\psi(v) + \alpha)_{i+1} \geq 0$, d'où $(-\psi(v) + \alpha)_{i+1} = 0$, $(\beta + \phi(v) - \psi(v) + \alpha)_{i+1} = 0$, puis $(\beta + \phi(v) - \psi(v) + \alpha)_j = 0$ pour tout $j \geq i+1$, et enfin $(\psi(v) - \alpha)_j = 0$ pour tout $j \geq i+1$.

Tout ceci montre que i vérifie les propriétés voulues. Il existe un unique $v' \in \mathcal{B}_1$ tel que $\phi(v') = r$ et $\psi(v') = s$, et on note Γ l'application qui envoie v sur v' . On a en particulier $\phi(\Gamma(v))_{i+1} = 1$, $\psi(\Gamma(v))_{i+1} = 1$ et pour tout $j \geq i+2$, $\phi(\Gamma(v))_j = 0$ et $\psi(\Gamma(v))_j = 0$. L'application Γ est clairement injective : si $v' = \Gamma(v)$ on a $\phi(v') = \phi(v) + \varepsilon_{i+1}$ et $\psi(v') = \psi(v) + \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n$, où $i+1$ est le plus grand indice j tel que ε_j soit un terme de $\phi(v')$. Ainsi v' détermine i , et on en déduit $\phi(v)$, $\psi(v)$ et v lui-même. On convient de dire que $v' \in \mathcal{B}_1$ réalise (*) pour i si $(\beta + \phi(v'), \beta + \phi(v') - \psi(v'))$ réalise (*) pour i . Si on pose

$$I_1 = \{v' \in \mathcal{B}_1 \mid v' \text{ réalise (*) pour un certain } i \text{ mais pas pour } n\},$$

il est clair que l'image de Γ est contenue dans I_1 , et il suffit d'établir l'égalité pour terminer la démonstration. Si $v' \in I_1$, on définit $i \leq n-2$ par $i+1 = \max\{j \mid v' \text{ réalise (*) pour } j\}$. On a donc $\beta_{i+1} = 0$, $\phi(v')_{i+1} = 1$, $\psi(v')_{i+1} = -1$ et $(\beta + \phi(v') - \psi(v'))_{i+1} = 0$. Ceci entraîne $\beta_j = 0$ et $(\beta + \phi(v') - \psi(v'))_j = 0$

2.2. LA DÉCOMPOSITION FONDAMENTALE

pour tout $j \geq i + 1$. De la définition de i , on déduit alors que $\phi(v')_j = \psi(v')_j = 0$ pour tout $j > i + 1$. Ainsi $i + 1$ est le plus grand indice j tel que ε_j soit un terme de $\phi(v')$, et s'il existe v tel que $\Gamma(v) = v'$, v est défini par $\phi(v') = \phi(v) + \varepsilon_{i+1}$ et $\psi(v') = \psi(v) + \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n$. Il est clair que ce v est dans I et satisfait à $\Gamma(v) = v'$.

Il reste à adapter cette preuve lorsque $G^0 = \text{SO}(2n + 1)$. On a

$$\begin{aligned} \text{ch}(\Lambda^l V_2 \otimes L(\beta)) &= \left(\sum_{\substack{v \in \mathcal{B}_1, \\ z_0 \vdash v}} \text{ch} L(\beta + \phi(v) - \psi(v)) - \sum_{\substack{v \in I, \\ z_0 \not\vdash v}} \text{ch} L(\beta + \phi(v) - \psi(v) + \alpha) \right) \\ &+ \left(\sum_{\substack{v \in \mathcal{B}_1, \\ z_0 \not\vdash v}} \text{ch} L(\beta + \phi(v) - \psi(v)) - \sum_{\substack{v \in I, \\ z_0 \vdash v}} \text{ch} L(\beta + \phi(v) - \psi(v) + \alpha) \right). \end{aligned}$$

Dans la première parenthèse, on remarque que si $v \in \mathcal{B}_1$ et $z_0 \vdash v$ (resp. $v \in I$ et $z_0 \not\vdash v$), la somme des nombres de termes de $\phi(v)$ et $\psi(v)$ (resp. $\phi(v)$ et $\psi(v) - \alpha$) vaut $l - 1$. Le contenu de la première parenthèse est donc égal à $\sum_{(\delta, \gamma)} \text{ch} L(\gamma) - \sum_{(\delta^1, \gamma^1)} \text{ch} L(\gamma^1)$

où les couples (δ, γ) , (δ^1, γ^1) vérifient :

1. On a $\delta = \beta + \phi \in P^+$ où ϕ est une somme de ε_i deux à deux distincts, et $\delta^1 = \beta + \phi^1 \in P^+$ où ϕ^1 est une somme de ε_i deux à deux distincts et distincts de ε_n .
2. On a $\gamma = \beta + \phi - \psi \in P^+$ où ψ est une somme de ε_j deux à deux distincts, et $\gamma^1 = \beta + \phi^1 - \psi^1 \in P^+$ où ψ^1 est une somme de ε_j deux à deux distincts et distincts de ε_n .
3. Soit h (resp. h^1) le nombre de termes de ϕ (resp. ϕ^1) et k (resp. k^1) celui de ψ (resp. ψ^1). On a $h + k = l - 1$ (resp. $h^1 + k^1 = l - 1$).

Comme $\beta_n = 0$, on voit que cette expression est encore égale à $\sum_{(\delta, \gamma)} \text{ch} L(\gamma)$ où les couples (δ, γ) vérifient :

1. On a $\delta = \beta + \phi \in P^+$ où ϕ est une somme de ε_i deux à deux distincts, et dont ε_n est un terme.
2. On a $\gamma = \beta + \phi - \psi \in P^+$ où ψ est une somme de ε_j deux à deux distincts.
3. Soit h le nombre de termes de ϕ et k celui de ψ . On a $h + k = l - 1$.

Dans la seconde parenthèse, si $v \in \mathcal{B}_1$ et $z_0 \not\vdash v$ (resp. $v \in I$ et $z_0 \vdash v$), la somme des nombres de termes de $\phi(v)$ et $\psi(v)$ (resp. $\phi(v)$ et $\psi(v) - \alpha$) vaut l (resp. $l - 2$). On définit une injection Γ_1 de $\{v \in I, z_0 \vdash v\}$ dans $\{v \in \mathcal{B}_1, z_0 \not\vdash v\}$ exactement comme on a défini Γ dans le cas $G^0 = \text{SO}(2n)$: pour tout $v \in I$ tel que $z_0 \vdash v$ on pose $i = \max\{j \mid (\beta + \phi(v))_j \neq 0\}$, et il existe un unique $v' \in \mathcal{B}_1$ vérifiant $z_0 \not\vdash v'$ et tel que $\phi(v') = \phi(v) + \varepsilon_{i+1}$ et $\psi(v') = \psi(v) + \varepsilon_{i+1} - \alpha$. L'application Γ_1 est injective d'image $\{v \in \mathcal{B}_1 \mid z_0 \not\vdash v \text{ et } v \text{ réalise } (*) \text{ pour un certain } i\}$, ce qui achève cette démonstration. \square

CHAPITRE 2. PRODUITS TENSORIELS EN CARACTÉRISTIQUE ZÉRO

Avant de poursuivre il nous faut introduire deux définitions lorsque $G^0 = \text{Spin}(2n)$.

Définition 2.4 Soit $G = \text{Pin}(2n)$ et soient $\beta \in P$ et $0 \leq l \leq n$ fixés. Un poids γ est dit admissible si la somme des coordonnées de $\gamma - \beta$ dans la base des ε_i est congrue à l modulo 2.

Si (δ, γ) satisfait les conditions de la proposition précédente, comme $\gamma - \beta = \phi - \psi$, on voit que γ est admissible. De plus, si $\gamma_n = \pm \frac{1}{2}$, les poids γ et $\tau(\gamma)$ ne peuvent être tous deux admissibles car $\gamma - \beta + (\beta - \tau(\gamma)) = \gamma - \tau(\gamma) = \pm \varepsilon_n$.

Définition 2.5 Soit $G = \text{Pin}(2n)$ et soient $\beta \in P$ et $0 \leq l \leq n$ fixés. Si $\gamma \in P$ vérifie $\gamma_n = \pm \frac{1}{2}$, on note $\theta(\gamma)$ celui des deux poids γ et $\tau(\gamma)$ qui est admissible. Sinon, $\theta(\gamma) = \gamma$.

Par conséquent, si $\gamma_n = \pm \frac{1}{2}$, seul $\theta(\gamma)$ peut apparaître dans la décomposition de la proposition précédente. Cette remarque sera souvent utile ultérieurement.

Exemple 2.6 Soient $G^0 = \text{Spin}(2n)$, $0 \leq r \leq n$ et considérons la décomposition de $\Lambda^r V \otimes L(\omega_+)$ sous l'action de G^0 . On pose $\Omega_i = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_i$ pour tout $i \leq n$. La proposition précédente montre qu'on a $\Lambda^r V \otimes L(\omega_+) = L(\omega_+ + \Omega_r) \oplus L(\omega_+ + \Omega_{r-2}) \oplus \dots \oplus L(\omega_- + \Omega_{r-1}) \oplus L(\omega_- + \Omega_{r-3}) \oplus \dots$. En tordant cette équation par σ et en remplaçant r par $r-1$ on obtient $\Lambda^{r-1} V \otimes L(\omega_-) = L(\omega_- + \Omega_{r-1}) \oplus L(\omega_- + \Omega_{r-3}) \oplus \dots \oplus L(\omega_+ + \Omega_{r-2}) \oplus L(\omega_+ + \Omega_{r-4}) \oplus \dots$.

On en déduit $\Lambda^r V \otimes L(\omega_+) = (\Lambda^{r-1} V \otimes L(\omega_-)) \oplus L(\omega_+ + \Omega_r)$, en particulier $\dim L(\omega_+ + \Omega_r) = 2^{n-1}(C_{2n}^r - C_{2n}^{r-1})$, formule qu'on utilisera ultérieurement. On voit de même que sous l'action de $\text{Spin}(2n+1)$, on a $\Lambda^r V \otimes L(\omega_+) = (\Lambda^{r-1} V \otimes L(\omega_+)) \oplus L(\omega_+ + \Omega_r)$. Ces décompositions sont à rapprocher de la décomposition $\Lambda^i V = \Lambda^{i-2} V \oplus L(\omega_i)$ sous l'action de $\text{Sp}(2n)$.

On énonce maintenant les décompositions correspondantes pour les groupes $\text{Pin}(2n)$, $\text{O}(2n)$ et $\text{O}(2n+1)$. On traite tout d'abord le groupe $\text{O}(2n)$, pour lequel la détermination des signes nécessite plus de travail que pour les groupes $\text{Pin}(2n)$ et $\text{O}(2n+1)$.

Corollaire 2.7 Soit $G = \text{O}(2n)$, $l \leq \dim V$ et $\beta \in P^+$ avec $\beta_n \geq 0$.

Si $\beta_n \geq 1$, on a

$$\Lambda^l V \otimes L(\beta, 0) = \bigoplus_{\substack{(\Delta, \Gamma) \\ \Gamma_n \geq 1}} L(\Gamma, 0) \oplus \bigoplus_{\substack{(\delta, \gamma) \\ \gamma_n = 0}} (L(\gamma, +) \oplus L(\gamma, -))$$

où les couples (δ, γ) , (Δ, Γ) sont soumis aux conditions de la proposition 2.3.

Si $\beta_n = 0$, on a

$$\Lambda^l V \otimes L(\beta, +) = \bigoplus_{\substack{(\Delta, \Gamma) \\ \Gamma_n \geq 1}} L(\Gamma, 0) \oplus \bigoplus_{\substack{(\delta, \gamma, s) \\ \gamma_n = 0}} L(\gamma, s)$$

2.2. LA DÉCOMPOSITION FONDAMENTALE

où les couples (δ, γ) , (Δ, Γ) sont soumis aux conditions de la proposition 2.3 et $s = \pm$ est défini comme suit, avec les notations de 2.3 : $s = -$ si et seulement si (δ, γ) réalise $(*)$ pour n .

Démonstration. Si $\beta_n \geq 1$, on remarque que $\Lambda^l V \otimes L(\beta, 0) = \Lambda^l V \otimes L(\beta, 0) \otimes \det$, il y a donc autant de $L(\gamma, +)$ que de $L(\gamma, -)$ dans la décomposition en somme directe de $\Lambda^l V \otimes L(\tau(\beta))$. On écrit la décomposition de $\Lambda^l V \otimes L(\beta)$ sous $\text{SO}(2n)$, en notant que si $L(\gamma)$ figure dans cette décomposition, on a $\gamma_n \geq 0$. On obtient une seconde équation en tordant les représentations par σ et on somme ces deux équations pour obtenir la décomposition de $\Lambda^l V \otimes L(\tau(\beta))$ sous $\text{O}(2n)$.

Si $\beta_n = 0$, la représentation $\Lambda^l V \otimes L(\beta)$ de $\text{SO}(2n)$ est invariante quand on la tord par σ , il y a donc, si $\Gamma_n \neq 0$, autant de $L(\Gamma)$ que de $L(\tau(\Gamma))$ dans sa décomposition en somme directe, d'où la condition $\Gamma_n \geq 1$. Il reste à déterminer les signess $= \pm$. Fixons γ avec $\gamma_n = 0$, notons P le nombre de triplets $(\delta, \gamma, 1)$ et N le nombre de triplets $(\delta, \gamma, -1)$. La multiplicité de $L(\gamma)$ dans $\Lambda^l V \otimes L(\beta)$ sous l'action de $\text{SO}(2n)$ est égale à $P + N$, et on détermine $P - N$ à l'aide du théorème 1.18. On convient de désigner par la même notation V les représentations naturelles de $\text{SO}(2n)$ et $\text{Sp}(2n - 2)$, et on note $L^{(2n-2)}(\lambda)$ la représentation irréductible de $\text{Sp}(2n - 2)$ de plus haut poids λ . Si $l < n$, on applique χ^σ à une décomposition de $\Lambda^l V \otimes L(\beta, +)$ en somme directe de représentations irréductibles, et on voit que $P - N$ est la multiplicité de $L^{(2n-2)}(\gamma)$ dans $L^{(2n-2)}(\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_l) \otimes L^{(2n-2)}(\beta)$. On a vu au premier chapitre que $L^{(2n-2)}(\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_l) \simeq \Lambda^l V / \Lambda^{l-2} V$, on obtient donc que $P - N$ est la différence entre la multiplicité de $L^{(2n-2)}(\gamma)$ dans $\Lambda^l V \otimes L^{(2n-2)}(\beta)$ et la multiplicité de $L^{(2n-2)}(\gamma)$ dans $\Lambda^{l-2} V \otimes L^{(2n-2)}(\beta)$. C'est également le cas si $l = n$: on a $P = N$ car $\Lambda^n V = \Lambda^n V \otimes \det$ sous $\text{O}(2n)$, et comme $\Lambda^{n-2} V$ et $\Lambda^n V$ sont isomorphes sous l'action de $\text{Sp}(2n - 2)$, la différence des deux multiplicités est nulle. Il n'y a donc pas lieu de séparer les cas $l < n$ et $l = n$.

On a $N = \frac{P+N-(P-N)}{2}$, on doit donc calculer la multiplicité de $L(\gamma)$ dans $\Lambda^l V \otimes L(\beta)$ sous l'action de $\text{SO}(2n)$, lui ajouter la multiplicité de $L^{(2n-2)}(\gamma)$ dans $\Lambda^{l-2} V \otimes L^{(2n-2)}(\beta)$ et lui retrancher la multiplicité de $L^{(2n-2)}(\gamma)$ dans $\Lambda^l V \otimes L^{(2n-2)}(\beta)$, avant de diviser le tout par deux. On introduit les conventions suivantes pour alléger la preuve : comme γ est fixé, tout couple (δ, γ) soumis aux deux premières conditions de 2.3 et tel que $h + k = l$ est abrégé en δ . On dit que δ réalise $(*)$ (resp. ne réalise pas $(*)$) si (δ, γ) réalise $(*)$ pour un certain i (resp. pour aucun i). De même δ réalise $(*)$ pour n si (δ, γ) réalise $(*)$ pour n . Un couple (δ, γ) intervenant dans la décomposition de $\Lambda^l V \otimes L(\beta)$ pour $\text{SO}(2n)$ est donc identifié au poids δ , réalisant $(*)$ pour n ou ne réalisant pas $(*)$. Un couple (δ, γ) intervenant dans la décomposition de $\Lambda^l V \otimes L^{(2n-2)}(\beta)$ est identifié au poids δ , avec $\delta_n = 0$. Considérons enfin un couple (δ, γ) intervenant dans la décomposition de $\Lambda^{l-2} V \otimes L^{(2n-2)}(\beta)$. Avec les notations de 2.3, on a $h + k = l - 2$ et non pas $h + k = l$ comme on le voudrait. Pour y remédier, le couple (δ, γ) est identifié au couple $(\delta + \varepsilon_{i+1}, \gamma)$, c'est-à-dire au poids $\delta + \varepsilon_{i+1}$, où $i = \max\{j \mid (\beta + \phi(v))_j \neq 0\} \leq n - 1$. Cette identification est légitime car cette correspondance est clairement injective, d'image l'ensemble des poids δ réalisant la

CHAPITRE 2. PRODUITS TENSORIELS EN CARACTÉRISTIQUE ZÉRO

condition (*), comme on le voit en reprenant la fin de la démonstration de 2.3. Avec ces notations :

1. la multiplicité de $L(\gamma)$ dans $\Lambda^l V \otimes L(\beta)$ sous l'action de $\text{SO}(2n)$ est égale à $\text{card}\{\delta \text{ ne réalisant pas } (*)\} + \text{card}\{\delta \text{ réalisant } (*) \text{ pour } n\}$,
2. la multiplicité de $L^{(2n-2)}(\gamma)$ dans $\Lambda^{l-2} V \otimes L^{(2n-2)}(\beta)$ est égale à $\text{card}\{\delta \text{ réalisant } (*)\}$,
3. la multiplicité de $L^{(2n-2)}(\gamma)$ dans $\Lambda^l V \otimes L^{(2n-2)}(\beta)$ est égale à $\text{card}\{\delta \mid \delta_n = 0\}$.

Il vient $2N = \text{card}\{\delta \text{ ne réalisant pas } (*)\} + \text{card}\{\delta \text{ réalisant } (*) \text{ pour } n\} + \text{card}\{\delta \text{ réalisant } (*)\} - \text{card}\{\delta \mid \delta_n = 0\} = \text{card}\{\delta \mid \delta_n \neq 0\} + \text{card}\{\delta \text{ réalisant } (*) \text{ pour } n\} = 2\text{card}\{\delta \text{ réalisant } (*) \text{ pour } n\}$. \square

Dans la proposition qui suit, si γ est un poids dominant de $\text{Spin}(2n)$, on note $\bar{\gamma}$ celui des deux poids γ et $\tau(\gamma)$ dont la $n^{\text{ème}}$ coordonnée est positive. Ainsi $\bar{\gamma}$ est un poids dominant de $\text{Pin}(2n)$ et $L(\bar{\gamma})$ est bien défini. La notation $\bar{\gamma}$ ne sera employée nulle part ailleurs.

Corollaire 2.8 *Soit $G = \text{Pin}(2n)$, $l \leq \dim V$ et $\beta \in P^+$ demi-entier avec $\beta_n \geq 0$. On a*

$$\Lambda^l V \otimes L(\beta, 0) = \bigoplus_{(\delta, \gamma)} L(\bar{\gamma}, 0)$$

où les couples (δ, γ) sont soumis aux conditions de la proposition 2.3.

Démonstration. Comme représentation de $\text{Spin}(2n)$, $\Lambda^l V$ est invariante si on la tord par $\sigma \in \text{Pin}(2n)$ puisqu'elle est la restriction de la représentation $\Lambda^l V$ de $\text{Pin}(2n)$. Il suffit alors d'écrire la décomposition de $\Lambda^l V \otimes L(\beta)$ sous $\text{Spin}(2n)$, de la tordre par σ et d'additionner les deux équations pour trouver la formule annoncée. \square

Quelques remarques s'imposent. Considérons un couple (δ, γ) qui paramètre la décomposition qu'on vient d'obtenir. Si $\gamma_n \neq \pm \frac{1}{2}$, on a $\bar{\gamma} = \gamma$. Si $\gamma_n = \pm \frac{1}{2}$, la multiplicité de $L(\bar{\gamma}, 0)$ dans $\Lambda^l V \otimes L(\beta, 0)$ est donnée par le nombre de couples vérifiant les conditions de 2.3 et dont la seconde composante est γ ou $\tau(\gamma)$. Mais on a remarqué que γ et $\tau(\gamma)$ ne peuvent figurer tous deux dans la décomposition de 2.3. La multiplicité de $L(\bar{\gamma}, 0)$ dans $\Lambda^l V \otimes L(\beta, 0)$ est donc la multiplicité de $L(\theta(\bar{\gamma}))$ (voir la définition 2.5) dans $\Lambda^l V \otimes L(\beta)$ sous l'action de $\text{Spin}(2n)$.

Enfin, sous l'action de σ_c défini à la fin du paragraphe 1.3.2, on a l'énoncé suivant.

Corollaire 2.9 *Soit $G = \text{O}(2n + 1)$, $l \leq \dim V$ et $\beta \in P^+$. On a sous l'action de σ_c*

$$\Lambda^l V \otimes L(\beta, +) = \bigoplus_{(\delta, \gamma)} L(\gamma, (-1)^l)$$

où les couples (δ, γ) , sont soumis aux conditions de la proposition 2.3.

2.3. EXPRESSIONS COMBINATOIRES

Démonstration. Comme σ_c agit par multiplication par $(-1)^l$ sur $\Lambda^l V$ et trivialement sur $L(\beta, +)$, il agit par multiplication par $(-1)^l$ sur $\Lambda^l V \otimes L(\beta, +)$. \square

2.3 Expressions combinatoires

Pour traduire les formules précédentes en termes de diagrammes de Young, il nous faut introduire certaines notations. Soient Y_1 et Y_2 deux diagrammes de Young. On écrit $Y_1 \subset Y_2$ si la boîte la plus à gauche de la première ligne de Y_1 est la même que celle de Y_2 , et pour tout i , le nombre de boîtes sur la $i^{\text{ème}}$ ligne de Y_1 est inférieur ou égal au nombre de boîtes sur la $i^{\text{ème}}$ ligne de Y_2 . Si β et γ sont deux poids dominants de G^0 tels que $Y(\beta) \subset Y(\gamma)$, on peut considérer le diagramme gauche $Y(\gamma) \setminus Y(\beta)$, où pour tout i la $i^{\text{ème}}$ ligne de $Y(\gamma) \setminus Y(\beta)$ est la $i^{\text{ème}}$ ligne de $Y(\gamma)$ privée des boîtes de la $i^{\text{ème}}$ ligne de $Y(\beta)$. Si γ est un poids dominant, on note $Y'(\gamma)$ le diagramme de Young obtenu en rajoutant une première colonne ayant exactement n boîtes à $Y(\gamma)$. Si $Y(\beta) \subset Y'(\gamma)$, on désigne par $\beta \rightarrow \gamma$ le diagramme gauche $Y'(\gamma) \setminus Y(\beta)$ (voir l'exemple 2.12).

Définition 2.10 *Soit Y un diagramme de Young gauche. Un pseudo-GL(2)-tableau gauche de forme Y est un remplissage T des boîtes de Y par des entier ≤ 2 tel que la numérotation est strictement croissante dans chaque ligne et croissante au sens large dans chaque colonne. Pour $i \in \{1, 2\}$, on note T_i le nombre de boîtes de T portant le numéro i . Le poids de T est $\mu(T) = T_2 - T_1$.*

Notons que cette définition prépare celles du chapitre cinq, où on définit les G -tableaux et les pseudo- G -tableaux sur des diagrammes de Young, G étant un groupe classique connexe.

Proposition 2.11 *Soit $0 \leq l \leq \dim V$ et soient $\beta, \gamma \in P^+$ avec $\beta_n \geq 0$ et $\gamma_n \geq 0$. Si $G = \text{Pin}(2n)$ ou $\text{Spin}(2n + 1)$, on suppose que β, γ sont demi-entiers. Si $G = \text{O}(2n)$, soient $s, t \in \{+, -, 0\}$, et si $G = \text{O}(2n + 1)$, soit $s \in \{+, -\}$.*

1. *Si $G = \text{Sp}(2n)$, la multiplicité de $L(\gamma)$ dans $\Lambda^l V \otimes L(\beta)$ est égale au nombre de pseudo-GL(2)-tableaux gauches de forme $\beta \rightarrow \gamma$ et de poids $n - l$.*
2. *Si $G = \text{Spin}(2n + 1)$, la multiplicité de $L(\gamma)$ dans $\Lambda^l V \otimes L(\beta)$ est égale au nombre de pseudo-GL(2)-tableaux gauches de forme $\beta \rightarrow \gamma$ et de poids $n - l$ ou $n - l + 1$.*
3. *Si $G = \text{Pin}(2n)$, la multiplicité de $L(\gamma, 0)$ dans $\Lambda^l V \otimes L(\beta, 0)$ est égale au nombre de pseudo-GL(2)-tableaux gauches de forme $\beta \rightarrow \gamma$ et de poids $n - l$ vérifiant la condition suivante. Si $\beta_n = \gamma_n = \frac{1}{2}$, on autorise un coefficient particulier dans l'unique boîte de $\beta \rightarrow \gamma$ sur la ligne n : il s'agit d'un 2 suivi d'un dièse, indiquant que ce 2 ne doit pas être pris en compte dans le calcul du poids du tableau.*

CHAPITRE 2. PRODUITS TENSORIELS EN CARACTÉRISTIQUE ZÉRO

4. Si $G = \mathrm{O}(2n)$, la multiplicité de $L(\gamma, t)$ dans $\Lambda^l V \otimes L(\beta, s)$ est égale au nombre de pseudo- $\mathrm{GL}(2)$ -tableaux gauches de forme $\beta \rightarrow \gamma$ et de poids $n - l$ vérifiant la condition suivante lorsque $\beta_n = \gamma_n = 0$. Si $s = t$, il n'existe pas de i tel que ($\beta_i = 0$ et le tableau a un 1 et pas de 2 sur la ligne i). Si $s \neq t$, alors le tableau a un 1 et pas de 2 sur la ligne n .
5. Si $G = \mathrm{O}(2n + 1)$, la multiplicité de $L(\gamma, (-1)^l s)$ dans $\Lambda^l V \otimes L(\beta, s)$ sous σ_c est égale au nombre de pseudo- $\mathrm{GL}(2)$ -tableaux gauches de forme $\beta \rightarrow \gamma$ et de poids $n - l$ ou $n - l + 1$ vérifiant la condition suivante. Si le poids est $n - l$, il n'existe pas de i tel que ($\beta_i = 0$ et le tableau a un 1 et pas de 2 sur sa $i^{\text{ème}}$ ligne). Si le poids est $n - l + 1$ et $\beta_n = 0$, le numéro 1 figure sur la ligne n .

Avant de démontrer cette proposition, faisons quelques remarques.

1. Si $G = \mathrm{O}(2n)$, soit T un tableau soumis aux conditions de la proposition, supposons $\beta_n = \gamma_n = 0$ et soit $i = \min\{j \mid \beta_j = \gamma_j = 0\}$. Alors toutes les lignes $j \geq i$ ont une unique boîte, ces boîtes sont dans une même colonne, et la condition à satisfaire s'énonce comme suit : toutes les lignes $j \geq i$ portent le même numéro, 1 si $s \neq t$, 2 sinon.
2. Si $G = \mathrm{Pin}(2n)$ et β, γ et l sont fixés, on voit facilement que les tableaux soumis aux conditions de la proposition ont tous ce 2 suivi d'un dièse, ou aucun d'entre eux ne l'a. Dans la preuve qui suit, on verra que ceci est lié au fait que $L(\gamma)$ et $L(\tau(\gamma))$ ne peuvent apparaître tous deux dans la décomposition de $\Lambda^l V \otimes L(\beta)$ sous $\mathrm{Spin}(2n)$. Plus précisément, les tableaux auront ce $2\#$ si et seulement si $\theta(\gamma)_n = -\frac{1}{2}$.
3. Si $G = \mathrm{Spin}(2n + 1)$ ou $\mathrm{O}(2n + 1)$ et β, γ et l sont fixés, tous les tableaux seront de poids $n - l$, ou tous de poids $n - l + 1$, car le poids de T est congru au nombre de boîtes de $\beta \rightarrow \gamma$ modulo 2.

Démonstration. 1. Soit $G = \mathrm{Sp}(2n)$, et reprenons les notations de 2.3. Pour tout i tel que ε_i est un terme de ϕ , on ajoute une boîte portant le numéro 1 sur la ligne i de $Y(\beta)$. Puis, pour tout j tel que ε_j n'est pas un terme de ψ , on ajoute une boîte portant le numéro 2 sur la ligne j de $Y(\beta)$. On obtient ainsi un diagramme Y , partiellement numéroté, qui représente un facteur direct $L(\gamma)$ de $\Lambda^l W \otimes L(\beta)$, et on retrouve le diagramme $Y(\gamma)$ en supprimant la première colonne de Y . On a donc $Y = Y'(\gamma)$, et $Y'(\gamma) \setminus Y(\beta)$ est bien muni d'un pseudo- $\mathrm{GL}(2)$ -tableau gauche de forme $\beta \rightarrow \gamma$ et de poids $n - k - h = n - l$. La croissance stricte dans chaque ligne équivaut à dire que ϕ et ψ sont des sommes de ε_j distincts, et la croissance au sens large dans chaque colonne signifie que $\beta + \phi$ est dominant.

2. Les cas $G = \mathrm{Spin}(2n + 1)$, $\mathrm{O}(2n)$ ou $\mathrm{O}(2n + 1)$ s'obtiennent de même.
3. Soit $G = \mathrm{Pin}(2n)$. Si $\beta_n > \frac{1}{2}$ ou $\beta_n = \frac{1}{2}$ et $\gamma_n > \frac{1}{2}$, le corollaire 2.8 montre que tous les (δ, γ) paramétrant la somme directe vérifient $\gamma_n \geq \frac{1}{2}$, et l'expression combinatoire de la multiplicité se fait comme dans le cas $G = \mathrm{Sp}(2n)$. Si

2.3. EXPRESSIONS COMBINATOIRES

$\beta_n = \gamma_n = \frac{1}{2}$, les couples à prendre en compte sont soit de la forme (δ, γ) , soit de la forme $(\delta, \tau(\gamma))$, un des deux cas excluant l'autre comme on l'a déjà signalé. Dans le premier cas, tout se passe comme précédemment, mais dans le second, un couple $(\delta, \tau(\gamma))$ s'identifie à un pseudo-GL(2)-tableau gauche sur le diagramme gauche $\beta \rightarrow \gamma$ privé de la ligne n , de poids $n - l$. Comme $\beta \rightarrow \gamma$ a une boîte sur la ligne n , on convient de remplir cette ligne avec un $2\#$, le 2 étant choisi pour se conformer à la croissance de la numérotation dans chaque colonne.

□

Exemple 2.12 Soit $G = \text{Sp}(8)$, $\beta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$, $\gamma = 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2$. On a

$$Y(\beta) = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \quad Y(\gamma) = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \quad \text{et} \quad \beta \rightarrow \gamma = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} .$$

La multiplicité de $L(\gamma)$ dans $\Lambda^4 V \otimes L(\beta)$ est égale à deux, car on a exactement deux pseudo-GL(2)-tableaux gauches de forme $\beta \rightarrow \gamma$ et de poids nul :

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} .$$

$$\begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} .$$

CHAPITRE 2. PRODUITS TENSORIELS EN CARACTÉRISTIQUE ZÉRO

Chapitre 3

Modules en caractéristique p

Soient $K = \overline{\mathbb{F}_p}$ et G un groupe algébrique défini sur K . L'étude des représentations de G en caractéristique p est bien plus difficile qu'en caractéristique zéro, et à l'heure actuelle on ignore presque tout des dimensions des modules simples lorsque la caractéristique est inférieure au nombre de Coxeter de G . Une des grandes différences est qu'on ne dispose plus de l'application exponentielle, et de fait on n'a plus de dictionnaire entre le groupe et son algèbre de Lie. La question majeure est la détermination des caractères des modules simples, et elle équivaut à la recherche des facteurs de composition des modules de Weyl, qui sont des réductions modulo p des modules simples de caractéristique zéro. L'approche que nous choisissons permet d'obtenir certains caractères irréductibles sans passer par la matrice de décomposition des modules de Weyl. On abordera toutefois cette question au dernier chapitre.

On débute ce chapitre en rappelant quelques résultats qui illustrent les différences entre caractéristique zéro et caractéristique p . On définit tout d'abord les modules de Weyl et les duals des modules de Weyl, en s'inspirant de la construction des modules simples en caractéristique zéro, et on indique leurs principales propriétés. Puis on énonce le théorème du produit tensoriel de Steinberg, qui fournit une description de tous les modules simples à l'aide d'un nombre fini d'entre eux. On illustre ces résultats lorsque $G = \mathrm{SL}(2)$, seul groupe pour lequel on dispose de résultats satisfaisants. On consacre ensuite un paragraphe au groupe de Weyl affine, qui joue un rôle aussi important que le groupe de Weyl en caractéristique zéro. Il intervient notamment dans la conjecture de Lusztig, dont on rappelle brièvement l'énoncé, et qui permet d'exprimer le caractère des modules simples à l'aide des caractères des modules de Weyl, pourvu que p soit assez grand. On aborde enfin la théorie des modules basculants, qui a déjà permis des progrès notables dans l'étude des représentations du groupe linéaire ([38]). Les points cruciaux de cette théorie sont la paramétrisation des modules basculants indécomposables par les poids dominants, et la stabilité par produit tensoriel. On termine par une partie technique où on applique les résultats de ce chapitre aux groupes classiques.

A l'exception des modules basculants, tous les résultats mentionnés ici, et beaucoup d'autres, se trouvent dans le livre de Jantzen [25].

3.1 Modules simples, modules de Weyl

Dans ce chapitre, G est un groupe algébrique simple connexe défini sur K , H est un tore maximal et B est un sous-groupe de Borel contenant H . Soit P le réseau des poids, P^+ le cône des poids dominants et soit $\rho \in \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} P$ la demi-somme des racines positives. On rappelle qu'en caractéristique p , les coracines sont des homomorphismes de K^* dans H , et pour tout poids $\lambda \in P = X(H)$ et toute coracine h_α , on note $\lambda(h_\alpha)$ l'unique entier relatif tel que pour tout $k \in K^*$, $\lambda \circ h_\alpha(k) = k^{\lambda(h_\alpha)}$.

Pour tout $\lambda \in P^+$, $L(\lambda)$ désigne le G -module simple de plus haut poids λ . On note W le groupe de Weyl et w_0 l'élément le plus long de W . Pour tout poids μ , K_μ est le H -module simple de poids μ , et pour tout module M , M_μ est le sous-espace de poids μ de M . On note $H^0(U, M)$ le sous-espace des vecteurs U -invariants de M . Remarquons que comme H normalise U , $H^0(U, M)$ est un H -module. On note enfin $F : G \rightarrow G$ le morphisme de Frobenius, et F_*M désigne le module obtenu en faisant agir $g \in G$ sur $m \in M$ par $F(g)m$.

On rappelle la propriété universelle du foncteur Ind_L^G , L étant un sous-groupe fermé de G : si N est un L -module, on a un L -morphisme canonique $\text{Ind}_L^G N \rightarrow N$, et pour tout G -module M , tout L -morphisme $M \rightarrow N$ se factorise à travers un unique G -morphisme $M \rightarrow \text{Ind}_L^G N$. Ceci se traduit par le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{array}{ccc} M & & N \\ & & \downarrow \\ & & \text{Ind}_L^G N \end{array}$$

Définition 3.1 Soit λ un poids dominant. Le dual du module de Weyl de plus haut poids λ est $\nabla(\lambda) = \text{Ind}_B^G K_{w_0\lambda}$, et le module de Weyl de plus haut poids λ est $\Delta(\lambda) = \nabla(-w_0\lambda)^*$.

On a choisi de définir les modules de Weyl à partir de leurs duals, mais on peut aussi les construire par réduction modulo p des représentations irréductibles en caractéristique zéro. Rappelons brièvement cette construction et celle des modules de Verma dont on reparlera dans la section suivante. Soit $G_{\mathbb{C}}$ le groupe algébrique simple simplement connexe sur \mathbb{C} de même diagramme de Dynkin que G . On désigne par \mathfrak{g} l'algèbre de Lie de $G_{\mathbb{C}}$, \mathfrak{h} est une sous-algèbre de Cartan et \mathfrak{b} une sous-algèbre de Borel contenant \mathfrak{h} . Pour toute algèbre de Lie \mathfrak{l} , on note $U(\mathfrak{l})$ son algèbre enveloppante. Soit $Z(\lambda) = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b})} \mathbb{C}_\lambda$ le module de Verma de plus haut poids λ . Il admet un unique quotient simple $V(\lambda)$, et si on note $V_{\mathbb{Z}}(\lambda)$ la \mathbb{Z} -forme de Chevalley de $V(\lambda)$ engendrée par un vecteur de plus haut poids λ , alors $\Delta(\lambda) = K \otimes_{\mathbb{Z}} V_{\mathbb{Z}}(\lambda)$.

Si le groupe G a deux composantes connexes, la description de ses modules de Weyl et duals des modules de Weyl en fonction de ceux de G^0 se fait de la même manière qu'au premier chapitre.

En caractéristique zéro, les modules $\nabla(\lambda)$, $\Delta(\lambda)$ et $L(\lambda)$ sont isomorphes, mais ce n'est plus le cas en caractéristique p . Les deux énoncés qui suivent illustrent les différentes propriétés des modules $\Delta(\lambda)$ et $\nabla(\lambda)$.

3.1. MODULES SIMPLES, MODULES DE WEYL

Théorème 3.2

1. Le poids λ est l'unique plus haut poids de $\nabla(\lambda)$ et $\dim \nabla(\lambda)_\lambda = 1$.
2. On a $H^0(U, \nabla(\lambda)) = Kv_\lambda$, où v_λ est un vecteur de poids λ .
3. Les poids de $\nabla(\lambda)$ sont dans l'enveloppe convexe de $W\lambda$.
4. Le module $\nabla(\lambda)$ contient un unique sous-module simple $L(\lambda)$, qui est engendré par v_λ .
5. Le caractère de $\nabla(\lambda)$ est donné par la formule des caractères de Weyl.

On déduit de ce théorème que $\nabla(\lambda)$ est un module indécomposable, tout comme $\Delta(\lambda)$, et que le caractère de $\Delta(\lambda)$ est également donné par la formule des caractères de Weyl. Notons que le module $\Delta(\lambda)$ est la solution d'un problème universel, comme le montre la proposition ci-dessous, dont il résulte que $L(\lambda)$ est un quotient de $\Delta(\lambda)$.

Proposition 3.3 $\Delta(\lambda)$ est engendré par un vecteur U -invariant de poids λ , et tout module engendré par un vecteur U -invariant de poids λ est un quotient de $\Delta(\lambda)$.

On mentionne maintenant un théorème sans équivalent en caractéristique zéro, qui permet de réduire l'étude des modules simples à un nombre fini d'entre eux. Soient $\{\alpha_i\}_{i \in I}$ les racines simples et $\{h_i\}_{i \in I}$ les coracines correspondantes. Un poids dominant est restreint si $\lambda(h_i) < p$ pour tout i , et tout poids dominant λ admet une unique décomposition p -adique $\lambda = \lambda(0) + p\lambda(1) + p^2\lambda(2) + \dots$ où les $\lambda(i)$ sont restreints et presque tous nuls.

Théorème 3.4 (du produit tensoriel de Steinberg) Soit $\lambda = \lambda(0) + p\lambda(1) + p^2\lambda(2) + \dots$ comme ci-dessus. On a

$$L(\lambda) = L(\lambda(0)) \otimes F_* L(\lambda(1)) \otimes F_*^2 L(\lambda(2)) \otimes \dots$$

Exemple 3.5 Illustrons ce qui vient d'être dit avec $G = \mathrm{SL}(2)$. Pour tout entier $n \geq 0$, on convient de noter n le poids $n\rho$. Soit V la représentation naturelle de $\mathrm{SL}(2)$. Si (X, Y) est une base de V avec X et Y de poids respectifs $1, -1$, alors $S^r V$ est formé des polynômes homogènes de degré r en X et Y . On a alors une description concrète des duals des modules de Weyl et des modules simples (cf. [25], seconde partie, 2.16) :

1. On a $\nabla(m) \simeq S^m V$ pour tout $m \geq 0$.
2. Le sous-module simple $L(m)$ a pour base les monômes $X^r Y^{m-r}$ tels que p ne divise pas C_m^r .

Rappelons (cf. [24], lemme 22.4) que p ne divise pas C_m^r si et seulement si $m_i \geq r_i$ pour tout i , avec $r = \sum_{i=0}^k r_i p^i$, $m = \sum_{i=0}^k m_i p^i$, $0 \leq r_i < p$ pour tout i et $0 \leq m_i < p$ pour tout i . Pour le voir, il suffit de remarquer que sur le corps à p éléments, les polynômes $(X+1)^m$ et $(X+1)^{m_0} (X^p+1)^{m_1} \dots (X^{p^k}+1)^{m_k}$ sont les mêmes, et la

comparaison des coefficients de X^r donne le résultat. Ainsi $\nabla(m)$ est simple si et seulement si $m = ap^j - 1$ avec $0 \leq j$ et $1 \leq a \leq p-1$, en particulier si $0 \leq m \leq p-1$.

Le théorème du produit tensoriel de Steinberg fournit une autre description des $\mathrm{SL}(2)$ -modules simples : le poids n est restreint si et seulement si $n \leq p-1$, et dans ce cas on vient d'établir que $L(n) \simeq \nabla(n)$. On a donc $L(\sum_{i=0}^k r_i p^i) = L(r_0) \otimes F_* L(r_1) \otimes \cdots \simeq \nabla(r_0) \otimes F_* \nabla(r_1) \otimes \cdots$.

Terminons cet exemple en signalant que la structure des modules de Weyl de $\mathrm{SL}(2)$, c'est-à-dire leurs facteurs de composition et leurs sous-modules, a été obtenue par Carter et Cline [8] et Deriziotis [11].

3.2 Le groupe de Weyl affine

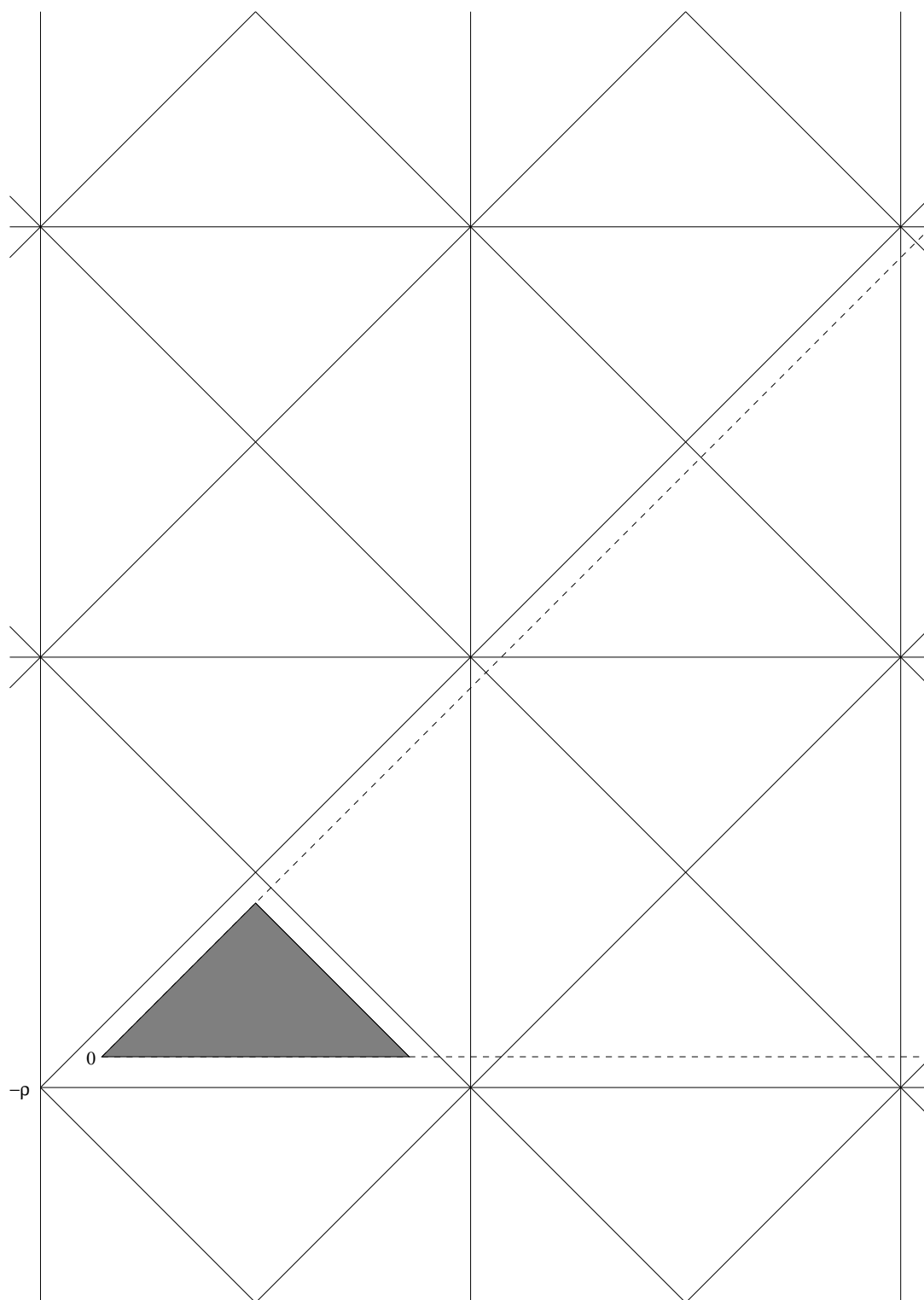
On peut lire Bourbaki [5] pour tout ce qui concerne les groupes de réflexions, ou consulter Jantzen [25] pour les groupes de Weyl affines. On note R le système de racines, R^+ l'ensemble des racines positives, on pose $P_{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} P$, on désigne par $\{\alpha_i\}_{i \in I}$ l'ensemble des racines simples et par $\{h_i\}_{i \in I}$ les coracines correspondantes.

Définition 3.6 *Le groupe de Weyl affine W_{aff} est le sous-groupe du groupe des transformations affines de $P_{\mathbb{R}}$ engendré par le groupe de Weyl W et par les translations de $P_{\mathbb{R}}$ de vecteur dans pR . L'action pointée de W_{aff} sur $P_{\mathbb{R}}$ est donnée par $w \cdot \lambda = w(\lambda + \rho) - \rho$ pour tout $w \in W_{\mathrm{aff}}$ et tout $\lambda \in P_{\mathbb{R}}$.*

Un poids $\lambda \in P$ est dit p -singulier s'il existe une racine α telle que p divise $(\lambda + \rho)(h_{\alpha})$, et un poids qui n'est pas p -singulier est dit p -régulier. Les poids p -singuliers sont les poids fixés sous l'action pointée d'un élément non trivial du groupe de Weyl affine. Pour toute racine α et tout $k \in \mathbb{Z}$, on pose $F_{\alpha, k} = \{\lambda \in P_{\mathbb{R}} \mid (\lambda + \rho)(h_{\alpha}) = pk\}$. Les $F_{\alpha, k}$ sont appelés murs, et chaque composante connexe du complémentaire dans $P_{\mathbb{R}}$ de la réunion des murs est appelée alcôve. L'adhérence de chaque alcôve est un domaine fondamental pour l'action pointée de W_{aff} , et W_{aff} agit simplement transitivement sur ce système d'alcôves. L'alcôve $C_{\mathrm{fond}} = \{\lambda \in P_{\mathbb{R}} \mid 0 < (\lambda + \rho)(h_{\alpha}) < p \text{ pour tout } \alpha \in R^+\}$ est appelée *alcôve fondamentale*, et on pose $C^0 = C_{\mathrm{fond}} \cap P^+$. Les poids p -réguliers sont les poids conjugués sous l'action pointée de W_{aff} à un élément de C^0 . On appliquera ces définitions quand on traitera les groupes $\mathrm{Pin}(4)$ et $\mathrm{O}(4)$ qui ne sont pas simples. Lorsque le groupe G est simple, le système de racines est irréductible et W_{aff} est engendré par W et la symétrie affine $s_0 : \lambda \mapsto \lambda - (\lambda(h_0) - p)\alpha_0$ où h_0 est la plus grande coracine et α_0 la plus grande racine courte. On a alors $C_{\mathrm{fond}} = \{\lambda \in P_{\mathbb{R}} \mid (\lambda + \rho)(h_0) < p \text{ et } 0 < (\lambda + \rho)(h_i) \text{ pour tout } i\}$.

Exemple 3.7 On représente sur la page 31 le système d'alcôves pour $\mathrm{Sp}(4)$ pour un p fixé, ainsi que le cône des poids dominants. Un poids $\lambda = \lambda_1 \varepsilon_1 + \lambda_2 \varepsilon_2$ est représenté par le point de coordonnées (λ_1, λ_2) , et C^0 est l'ensemble des poids contenus dans la partie grisée du cône.

3.2. LE GROUPE DE WEYL AFFINE



Revenons un instant aux modules de Verma. A l'aide de l'isomorphisme de Harish-Chandra, on montre que si $V(\mu)$ est un facteur de composition de $Z(\lambda)$, alors il existe $w \in W$ avec $\lambda = w \cdot \mu$. On a un résultat analogue en caractéristique p , où le groupe de Weyl affine remplace le groupe de Weyl. Il suffit pour cela d'appliquer le théorème qui suit à $M = \Delta(\lambda)$.

Théorème 3.8 (“linkage principle”) (cf. [25], partie II, 6.17) *Soit M un G -module indécomposable et soient $\lambda, \mu \in P^+$. Si $L(\mu)$ et $L(\lambda)$ sont des facteurs de composition de M , alors il existe $w \in W_{\text{aff}}$ avec $\mu = w \cdot \lambda$.*

Corollaire 3.9 *Si λ est dominant et $(\lambda + \rho)(h_0) \leq p$, alors $\Delta(\lambda) \simeq \nabla(\lambda)$ est simple.*

Démonstration. Si λ est dominant et $(\lambda + \rho)(h_0) \leq p$, il n'existe pas de poids $\mu \in P^+ \cap W_{\text{aff}} \cdot \lambda$ tel que $\mu < \lambda$. Par conséquent, le module $\Delta(\lambda)$ est simple, et comme $\nabla(\lambda)$ a le même caractère que $\Delta(\lambda)$, il vient $\text{ch } \nabla(\lambda) = \text{ch } L(\lambda)$ puis $\nabla(\lambda) \simeq L(\lambda)$. \square

En particulier, on voit que pour un poids dominant λ fixé et p assez grand, le module $L(\lambda)$ a même caractère qu'en caractéristique zéro.

La conjecture de Lusztig, dont nous allons maintenant dire quelques mots, exprime le caractère des modules simples comme combinaison linéaire des caractères des modules de Weyl, une des conditions étant que p est supérieur ou égal au nombre de Coxeter. On pourra consulter l'article de Donkin dans [9] pour plus d'explications. Soit h_0 la plus grande coracine et $h = \rho(h_0) + 1$ le nombre de Coxeter. On note ℓ la fonction longueur sur W_{aff} vu comme groupe de Coxeter, on désigne par \leq l'ordre de Bruhat sur W_{aff} et les polynômes de Kazhdan-Lusztig sont notés $P_{y,w}$.

Conjecture 3.10 (Lusztig) ([35]) *Soit $w \in W_{\text{aff}}$ tel que $-w\rho - \rho$ soit dominant. Si $p \geq h$ et $-w\rho(h_0) \leq p(p - h + 2)$, on a*

$$\text{ch } L(-w\rho - \rho) = \sum_{\substack{y \leq w \\ -y\rho - \rho \in P^+}} (-1)^{\ell(w) - \ell(y)} P_{y,w}(1) \text{ch } \Delta(-y\rho - \rho).$$

Si on a $p \geq h$, on peut obtenir le caractère de tous les modules simples à partir de cette conjecture (cf. [3]). A l'heure actuelle, on sait seulement que, pour un système de racines fixé, la conjecture est vraie pour p suffisamment grand (cf. [1]). Un des objectifs de cette thèse est d'obtenir des formules valables si $p < h$. A titre d'exemple, on donne au chapitre 7 des équivalents des dimensions des modules simples de plus haut poids un poids fondamental lorsque le rang du groupe (et donc h) tend vers l'infini, à p fixé.

3.3 Modules basculants

Tous les résultats rappelés dans cette section peuvent se trouver dans les articles de Donkin [13] et Mathieu [38].

3.3. MODULES BASCULANTS

3.3.1 Premières propriétés

Définition 3.11 *Un G -module M est muni d'une bonne filtration (resp. filtration de Weyl) s'il existe une filtration $M \supset M_1 \supset M_2 \supset \dots \supset \{0\}$ de M par des sous-modules tels que $M_i/M_{i+1} = \nabla(\lambda_i)^{n_i}$, (resp. $M_i/M_{i+1} = \Delta(\lambda_i)^{n_i}$) avec $\lambda_i \in P^+$ et $n_i \in \mathbb{N}$. Un module M est basculant si M est muni d'une bonne filtration et d'une filtration de Weyl.*

On peut donc écrire le caractère d'un module basculant comme une somme de caractères de modules de Weyl. Le coefficient de $\text{ch } \Delta(\lambda)$ dans la décomposition de $\text{ch } M$ est appelé multiplicité de $\Delta(\lambda)$ dans M et notée $[M : \Delta(\lambda)]$. Notons que cette multiplicité est indépendante de la filtration, et elle est égale à la multiplicité $[M : \nabla(\lambda)]$ de $\nabla(\lambda)$ dans M .

On énonce maintenant un critère nécessaire et suffisant pour qu'un G -module donné soit muni d'une bonne filtration. Munissons $\mathbb{Z}[P]$ de la relation d'ordre suivante : soient $\eta = \sum_{\lambda \in P} \eta_\lambda e^\lambda \in \mathbb{Z}[P]$ et $\xi = \sum_{\lambda \in P} \xi_\lambda e^\lambda \in \mathbb{Z}[P]$. Alors $\eta \leq \xi$ si et seulement si pour tout $\lambda \in P$ on a $\eta_\lambda \leq \xi_\lambda$.

Proposition 3.12 *Pour tout G -module M on a $\text{ch } M \leq \sum_{\lambda \in P^+} h^0(M, \lambda) \text{ch } \Delta(\lambda)$, avec $h^0(M, \lambda) = \dim H^0(U, M)_\lambda$.*

Proposition 3.13 *Soit M un G -module. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. M est muni d'une bonne filtration
2. $\text{ch } M = \sum_{\lambda \in P^+} h^0(M, \lambda) \text{ch } \Delta(\lambda)$.
3. $\text{Ext}^1(\Delta(\lambda), M) = 0$ pour tous $\lambda \in P^+$.

Si M est basculant, on a donc $[M : \Delta(\lambda)] = h^0(M, \lambda)$ pour tout $\lambda \in P^+$. Cette proposition a pour corollaire immédiat

Corollaire 3.14 *Tout facteur direct d'un module muni d'une bonne filtration (resp. basculant) est muni d'une bonne filtration (resp. basculant).*

On dispose d'un autre résultat de stabilité pour la classe des modules munis d'une bonne filtration (resp. basculant), beaucoup plus difficile à établir.

Théorème 3.15 *(Donkin, Mathieu) Le produit tensoriel de deux modules munis d'une bonne filtration (resp. basculants) est muni d'une bonne filtration (resp. basculant).*

3.3.2 Modules basculants indécomposables

D'après ce qui précède, tout module basculant est une somme directe de modules basculants indécomposables, ce qui nous amène à étudier ces derniers en détail. La classification des modules basculants indécomposables est particulièrement sympathique puisqu'ils admettent un paramétrage discret par les poids dominants. Du théorème ci-dessous, on déduit en outre facilement que deux modules basculants ayant même caractère sont isomorphes, un résultat à la fois remarquable et utile dans les calculs.

Théorème 3.16 (*Donkin [13]*)

1. Pour tout poids dominant λ , il existe un unique module basculant indécomposable $T(\lambda)$ tel que $\dim T(\lambda)_\lambda = 1$ et tous les poids de $T(\lambda)$ sont dans l'enveloppe convexe de $W\lambda$.
2. $T(\lambda) \simeq T(\mu)$ si et seulement si $\lambda = \mu$.
3. Tout module basculant indécomposable est isomorphe à un certain $T(\lambda)$.

Si le groupe G a deux composantes connexes, on peut décrire ses modules basculants indécomposables en fonction de ceux de G^0 , exactement comme on a décrit les modules simples de G à l'aide de ceux de G^0 au premier chapitre.

Le linkage principe nous apporte une information supplémentaire : si $\Delta(\mu)$ ou $L(\mu)$ est un sous-quotient de $T(\lambda)$, alors il existe $w \in W_{\text{aff}}$ avec $\mu = w \cdot \lambda$. Remarquons qu'en caractéristique zéro, tout module est basculant et $T(\lambda) \simeq L(\lambda) \simeq \Delta(\lambda) \simeq \nabla(\lambda)$ pour tout $\lambda \in P^+$. On énonce maintenant un lemme technique qui sera souvent utilisé par la suite.

Lemme 3.17 *Soit M un G -module tel que $\text{ch}(M) = \sum n_i \text{ch} \Delta(\lambda^i)$, où les poids λ^i sont dans l'adhérence de C_{fond} , i. e. $(\lambda^i + \rho)(h_0) \leq p$ pour tout i . Alors M est basculant et $M = \bigoplus T(\lambda^i)^{n_i}$. En particulier on a $\nabla(\lambda) = \Delta(\lambda) = L(\lambda) = T(\lambda)$ pour tout poids dominant λ tel que $(\lambda + \rho)(h_0) \leq p$.*

Démonstration. Si λ est dominant et $(\lambda + \rho)(h_0) \leq p$, on a vu que $\nabla(\lambda) = \Delta(\lambda) = L(\lambda)$. Ainsi $L(\lambda)$ est basculant et indécomposable, d'où $T(\lambda) = L(\lambda)$. Ceci montre qu'une suite de composition de M est à la fois une bonne filtration et une filtration de Weyl, et $\text{ch}(M) = \sum n_i \text{ch} T(\lambda^i)$, d'où le résultat. \square

On a une connaissance beaucoup plus précise des modules $T(\lambda)$ lorsque $G = \text{SL}(2)$. On peut en effet déterminer leur caractère de manière récursive à l'aide d'une formule analogue au théorème du produit tensoriel de Steinberg. Notons qu'on ne connaît pas les caractères des modules $T(\lambda)$ lorsque $G = \text{SL}(3)$ (cf. [27]).

Théorème 3.18 (Donkin [13]) *Soit $G = \text{SL}(2)$.*

1. Si $0 \leq j \leq p - 1$, on a $T(j\rho) \simeq \Delta(j\rho) \simeq L(j\rho)$.

3.3. MODULES BASCULANTS

2. Si $p \leq j \leq 2p - 2$ et $i + j = 2p - 2$, on a une suite exacte courte

$$0 \rightarrow \Delta(j\rho) \rightarrow T(j\rho) \rightarrow \Delta(i\rho) \rightarrow 0.$$

3. Si $j = kp + i$ avec $p - 1 \leq i \leq 2p - 2$ et $k \geq 0$, on a $T(j\rho) = F_*T(k\rho) \otimes T(i\rho)$.

Remarquons que le point 1. correspond au cas où $(\lambda + \rho)(h_0) \leq p$. Dans [14], ce théorème est utilisé pour obtenir la décomposition explicite des produits tensoriels $T(1) \otimes T(j)$, qui elle-même permet de calculer la série génératrice, à $m \in \mathbb{N}$ fixé, des multiplicités $[T(1)^{\otimes j} : T(m)]$. On utilisera ce résultat de manière décisive au dernier chapitre.

On termine ce paragraphe par une généralisation du point 2. du théorème précédent.

Proposition 3.19 *Soit $\lambda \in C^0$. On a une suite exacte non scindée*

$$0 \rightarrow \Delta(s_0 \cdot \lambda) \rightarrow T(s_0 \cdot \lambda) \rightarrow \Delta(\lambda) \rightarrow 0.$$

Démonstration. Dans [38], il est rappelé que si T_{s_0} est le foncteur de réflexion de Jantzen et si M est basculant, alors $T_{s_0}M$ est basculant. Le corollaire 10.3 de [38] montre que le module $T_{s_0}\Delta(\lambda)$ est indécomposable et qu'on a une suite exacte non scindée $0 \rightarrow \Delta(s_0 \cdot \lambda) \rightarrow T_{s_0}\Delta(\lambda) \rightarrow \Delta(\lambda) \rightarrow 0$. Comme λ est dans C^0 , le module $\Delta(\lambda)$ est basculant, $T_{s_0}\Delta(\lambda)$ est donc basculant et indécomposable de plus haut poids $s_0 \cdot \lambda$, ce qui permet de conclure. \square

3.3.3 Formule modulaire de Verlinde

On ne dispose malheureusement pas d'une formule pour décomposer les produits tensoriels $T(\alpha) \otimes T(\beta)$ pour tous α, β dominants. Cependant, si on choisit α et β dans C^0 , on a une expression explicite de la multiplicité de $T(\gamma)$ pour tout $\gamma \in C^0$. Avant d'énoncer ce résultat, quelques préliminaires s'imposent. Considérons la catégorie \mathcal{T} des modules basculants. Elle est stable par somme directe et produit tensoriel, ce qui en fait une catégorie tensorielle. On commence par exhiber un idéal tensoriel \mathcal{I} de \mathcal{T} . On note $h = \rho(h_0) + 1$ le nombre de Coxeter, et on remarque que C^0 est non vide si et seulement si $p \geq h$. Les lemmes 8.5 et 9.3 de [38] peuvent se résumer en le théorème suivant.

Théorème 3.20 *Soit $p \geq h$ et soit $\lambda \in P^+$. La dimension de $T(\lambda)$ est divisible par p si et seulement si $\lambda \notin C^0$. En outre, si M est un module basculant et p divise $\dim T(\lambda)$, alors p divise la dimension de tout facteur direct de $M \otimes T(\lambda)$.*

Ainsi les modules basculants qui sont somme directe de certains $T(\lambda)$, $\lambda \notin C^0$, forment un idéal tensoriel \mathcal{I} de \mathcal{T} , et la formule qu'on a en vue donne la structure de la catégorie tensorielle quotient. Pour tout poids λ dominant, on note χ_λ le caractère de $\Delta(\lambda)$, et pour tous poids dominants α, β, γ on note $K_\gamma^{\alpha, \beta}$ les multiplicités définies par $\chi_\alpha \chi_\beta = \sum K_\gamma^{\alpha, \beta} \chi_\gamma$. Autrement dit on a en caractéristique zéro $L(\alpha) \otimes L(\beta) = \bigoplus L(\gamma)^{K_\gamma^{\alpha, \beta}}$.

Théorème 3.21 (Formule modulaire de Verlinde) [38] Soient $\alpha, \beta \in C^0$. On a

$$T(\alpha) \otimes T(\beta) = \bigoplus_{\gamma \in C^0} T(\gamma)^{n_{\gamma}^{\alpha, \beta}} \oplus T,$$

avec $T \in \mathcal{I}$ et $n_{\gamma}^{\alpha, \beta} = \sum_{w \in W_{\text{aff}}} \varepsilon(w) K_{w \cdot \gamma}^{\alpha, \beta} \leq K_{\gamma}^{\alpha, \beta}$ pour tout $\gamma \in C^0$.

Ces deux théorèmes jouent un rôle primordial au chapitre 6. En particulier le domaine de validité des formules de caractères qu'on obtient en résulte directement.

3.4 Application aux groupes classiques

Dans cette section, on considère $G = \text{Sp}(2n), \text{Spin}(2n+1), \text{Pin}(2n), \text{O}(2n)$ ou $\text{O}(2n+1)$ et on démontre un certain nombre de résultats techniques.

3.4.1 Alcôve fondamentale

On commence par décrire C^0 pour la composante neutre de chacun de ces groupes, et on dégage des conditions nécessaires et suffisantes pour que C^0 soit non vide. On désigne toujours par h le nombre de Coxeter de G .

Lemme 3.22

1. Soit $G = \text{Sp}(2n)$.

(a) Si $n \geq 2$, on a $h = 2n$ et $C^0 = \{\sum_{i=1}^n \lambda_i \varepsilon_i \in P^+ \mid \lambda_1 + \lambda_2 + 2n \leq p\}$.

(b) Si $n = 1$, on a $h = 2$ et $C^0 = \{\lambda_1 \varepsilon_1 \in P^+ \mid \lambda_1 + 2 \leq p\}$.

2. Soit $G = \text{Spin}(2n+1)$ ou $\text{O}(2n+1)$. On a $h = 2n$ et $C^0 = \{\sum_{i=1}^n \lambda_i \varepsilon_i \in P^+ \mid 2\lambda_1 + 2n \leq p\}$.

3. Soit $G = \text{Pin}(2n)$ ou $\text{O}(2n)$.

(a) Si $n \geq 3$, on a $h = 2n - 2$ et $C^0 = \{\sum_{i=1}^n \lambda_i \varepsilon_i \in P^+ \mid \lambda_1 + \lambda_2 + 2n - 2 \leq p\}$.

(b) Si $n = 2$, on a $C^0 = \{\lambda_1 \varepsilon_1 + \lambda_2 \varepsilon_2 \mid \lambda_1 + |\lambda_2| \leq p - 2, |\lambda_2| \leq \lambda_1\}$.

Démonstration. Si $G = \text{Pin}(4)$ ou $G = \text{O}(4)$, les racines positives sont $\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2$ et on a $\rho = \varepsilon_1$, d'où $C_{\text{fond}} = \{\lambda_1 \varepsilon_1 + \lambda_2 \varepsilon_2 \mid \lambda_1 + |\lambda_2| + 1 < p, 0 < \lambda_1 - |\lambda_2| + 1\}$.

Les autres groupes étant simples, il suffit d'expliciter α_0 et ρ . Si $G = \text{Spin}(2n+1)$ ou $\text{O}(2n+1)$, on a $\rho = (n - \frac{1}{2})\varepsilon_1 + (n - 1 - \frac{1}{2})\varepsilon_2 + \dots + \frac{1}{2}\varepsilon_n$, les racines courtes positives sont les $\pm \varepsilon_i$ et pour tout i on a $\varepsilon_i \leq \varepsilon_1$, par conséquent $\alpha_0 = \varepsilon_1$. Si $G = \text{Sp}(2) = \text{SL}(2)$ on a $\alpha_0 = 2\varepsilon_1$ et $\rho = \varepsilon_1$.

Dans tous les autres cas les racines courtes positives sont les $(\varepsilon_i \pm \varepsilon_j)_{i < j}$ et pour tous $i < j$ on a $\varepsilon_i - \varepsilon_j \leq \varepsilon_1 - \varepsilon_j \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, par conséquent $\alpha_0 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$. Si $G = \text{Sp}(2n)$, on a $\rho = n\varepsilon_1 + (n-1)\varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n$, et si $G = \text{Pin}(2n)$ ou $G = \text{O}(2n)$ on a $\rho = (n-1)\varepsilon_1 + (n-2)\varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_{n-1}$. \square

3.4. APPLICATION AUX GROUPES CLASSIQUES

Comme p est impair lorsque $G \neq \mathrm{Sp}(2n)$, on en déduit le corollaire suivant.

Corollaire 3.23 *Si $G = \mathrm{Sp}(2n)$ (resp. $G = \mathrm{Spin}(2n+1)$ ou $\mathrm{O}(2n+1)$), $G = \mathrm{Pin}(2n)$ ou $\mathrm{O}(2n)$, C^0 est non vide si et seulement si $p \geq 2n$ (resp. $p \geq 2n+1$, $p \geq 2n-1$).*

3.4.2 Puissances extérieures de la représentation naturelle

On verra au chapitre suivant que les puissances extérieures de la représentation naturelle de G sont des G -modules basculants (cf. corollaire 4.14). On montre ici que lorsque C^0 est non vide, les G -modules $\Lambda^l V$ sont des modules basculants dont on fournit la décomposition en somme directe de modules indécomposables. Si $G = \mathrm{Spin}(2n+1)$, on pose $S = L(\omega_+)$, et si $G = \mathrm{Pin}(2n)$ on pose $S = L(\omega_+, 0)$, conformément aux notations de 1.2.4.

Lemme 3.24 *On suppose C^0 non vide.*

1. *Si $G = \mathrm{Sp}(2n)$ et $l \leq n$, on a $\Lambda^l V \simeq T(\omega_l) \oplus T(\omega_{l-2}) \oplus \dots$.*
2. *Si $G = \mathrm{Spin}(2n+1)$ on a $\Lambda^l V \simeq T(\omega_l)$ pour tout $l \leq n-1$, $\Lambda^n V \simeq T(2\omega_+)$ et $S \simeq T(\omega_+)$.*
3. *Si $G = \mathrm{O}(2n+1)$ on a (sous l'action de σ_c) : $\Lambda^l V \simeq T(\omega_l, (-1)^l)$ pour tout $l \leq n-1$, $\Lambda^n V \simeq T(2\omega_+, (-1)^n)$.*
4. *Si $G = \mathrm{O}(2n)$ on a $\Lambda^l V \simeq T(\omega_l, +)$ pour tout $l \leq n-2$, $\Lambda^{n-1} V \simeq T(\omega_+ + \omega_-, +)$ et $\Lambda^n V \simeq T(2\omega_+, 0)$.*
5. *Si $G = \mathrm{Pin}(2n)$ on a $S \simeq T(\omega_+)$.*

Démonstration. Si $G = \mathrm{Sp}(2n)$, tous les poids fondamentaux sont dans l'adhérence de l'alcôve fondamentale : si $n \geq 2$, on a $p+1 \geq 2n+2$ car p est impair, et si $n = 1$ on a $p+1 \geq 3$. En outre on a $\mathrm{ch} \Lambda^l V = \mathrm{ch} \Delta(\omega_l) + \mathrm{ch} \Delta(\omega_{l-2}) + \dots$: c'est vrai en caractéristique 0, et donc en toute caractéristique puisque le caractère de $\Lambda^l V$ et des modules de Weyl ne dépend pas de la caractéristique. Le lemme 3.17 donne alors le résultat. Si $G = \mathrm{Spin}(2n+1)$, les poids fondamentaux et $2\omega_+$ sont dans l'adhérence de C_{fond} , et on conclut de la même manière. Si $G = \mathrm{Pin}(2n)$, $\mathrm{O}(2n)$ ou $\mathrm{O}(2n+1)$, on démontre tout d'abord les formules correspondantes sous l'action de G^0 . Pour cela on vérifie que les poids fondamentaux ainsi que $2\omega_+$, $2\omega_-$, $\omega_+ + \omega_-$ sont dans l'adhérence de C_{fond} , et la suite de l'argument est identique. Il n'y a plus qu'à préciser l'action de σ (ou σ_c) sur le vecteur de plus haut poids, ce qui est immédiat. On obtient en particulier, sous l'action de G^0 : $\Lambda^n V \simeq T(2\omega_+) \oplus T(2\omega_-)$ si $G = \mathrm{O}(2n)$ et $S \simeq T(\omega_+) \oplus T(\omega_-)$ si $G = \mathrm{Pin}(2n)$. \square

3.4.3 Suite exacte

Nous aurons besoin par la suite d'un analogue de la suite exacte 3.19 pour $G = \mathrm{O}(2n)$ ou $\mathrm{O}(2n+1)$, appliquée à un poids λ tel que $(\lambda + \rho)(h_0) = p-1$, c'est-à-dire $s_0 \cdot \lambda = \lambda + \alpha_0$. Le poids λ est donc au bord de l'alcôve C_{fond} .

CHAPITRE 3. MODULES EN CARACTÉRISTIQUE P

Proposition 3.25 Soit $G = O(2n + 1)$. Si $\lambda \in C^0$ et $s_0 \cdot \lambda = \lambda + \alpha_0$, on a (sous l'action de σ_c) la suite exacte $0 \rightarrow \Delta(s_0 \cdot \lambda, +) \rightarrow T(s_0 \cdot \lambda, +) \rightarrow \Delta(\lambda, +) \rightarrow 0$.

Démonstration. Le module $T(s_0 \cdot \lambda, +)$ est indécomposable, ce qui implique que σ_c agit comme $\pm \text{id}$. Comme σ_c agit trivialement sur le vecteur de plus haut poids, on en déduit qu'il agit trivialement sur $T(s_0 \cdot \lambda, +)$, et donc sur $\Delta(s_0 \cdot \lambda)$ et $\Delta(\lambda)$. \square

Proposition 3.26 Soit $G = O(2n)$ avec $n \geq 3$ et soit $\lambda \in C^0$ tel que $\lambda_n = 0$ et $s_0 \cdot \lambda = \lambda + \alpha_0$. On a la suite exacte $0 \rightarrow \Delta(s_0 \cdot \lambda, +) \rightarrow T(s_0 \cdot \lambda, +) \rightarrow \Delta(\lambda, +) \rightarrow 0$.

Démonstration. A priori on a $0 \rightarrow \Delta(s_0 \cdot \lambda, +) \rightarrow T(s_0 \cdot \lambda, +) \rightarrow \Delta(\lambda, \pm) \rightarrow 0$, et il reste à établir que $\Delta(\lambda, -)$ ne figure pas dans une bonne filtration de $T(s_0 \cdot \lambda, +)$. Montrons tout d'abord que si $\lambda_{n-1} = 0$,

$$T(\lambda, +) \otimes T(\varepsilon_1, +)^{\otimes 2} = T(s_0 \cdot \lambda, +) \oplus \dots,$$

et si $\lambda_{n-1} \neq 0$,

$$T(\lambda, +) \otimes T(\varepsilon_1, +)^{\otimes 2} = T(s_0 \cdot \lambda, +) \oplus T(\lambda + \varepsilon_n, 0) \otimes T(\varepsilon_1, +) \oplus \dots$$

On a $T(\varepsilon_1, +)^{\otimes 2} = T(0) \oplus T(2\varepsilon_1, +) \oplus T(\varepsilon_1 + \varepsilon_2, +)$. En effet le lemme 3.17 s'applique car les poids ε_1 , $2\varepsilon_1$ et $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ sont dans l'adhérence de C_{fond} . Il suffit donc d'établir que $\text{ch } \Delta(\varepsilon_1, +)^{\otimes 2} = \text{ch } T(0) + \text{ch } \Delta(2\varepsilon_1, +) + \text{ch } \Delta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2, +)$. Cette équation est indépendante de la caractéristique et elle résulte, en caractéristique zéro, du corollaire 2.7. Comme $T(s_0 \cdot \lambda, +)$ est facteur direct de $T(\lambda, +) \otimes T(\varepsilon_1 + \varepsilon_2, +)$, ce qui précède montre qu'il est aussi facteur direct de $T(\lambda, +) \otimes T(\varepsilon_1, +)^{\otimes 2}$. De plus, si $\lambda_{n-1} \neq 0$, $T(\lambda + \varepsilon_n, 0)$ est facteur direct de $T(\lambda, +) \otimes T(\varepsilon_1, +)$: on a $T(\lambda, +) \otimes T(\varepsilon_1, +) = \Delta(\lambda, +) \otimes \Delta(\varepsilon_1, +)$, et le corollaire 2.7 donne $\text{ch } \Delta(\lambda, +) \otimes \Delta(\varepsilon_1, +) = \text{ch } \Delta(\lambda + \varepsilon_n, 0) + \sum_{\mu} k_{\mu} \text{ch } \Delta(\mu, +)$, où $\lambda + \varepsilon_n$ et les μ sont dans l'adhérence de C_{fond} , d'où $T(\lambda, +) \otimes T(\varepsilon_1, +) = T(\lambda + \varepsilon_n, 0) \oplus \bigoplus_{\mu} T(\mu, +)^{k_{\mu}}$. Le même argument montre que $T(s_0 \cdot \lambda, +)$ n'est pas facteur direct de $T(\lambda + \varepsilon_n, 0) \otimes T(\varepsilon_1, +) \simeq \Delta(\lambda + \varepsilon_n, 0) \otimes \Delta(\varepsilon_1, +)$, on a donc bien la décomposition annoncée de $T(\lambda, +) \otimes T(\varepsilon_1, +)^{\otimes 2}$.

Déterminons la multiplicité de $\Delta(\lambda, -)$ dans $T(\lambda, +) \otimes T(\varepsilon_1, +)^{\otimes 2} \simeq \Delta(\lambda, +) \otimes \Delta(\varepsilon_1, +)^{\otimes 2}$. Le corollaire 2.7 appliqué deux fois montre qu'elle est nulle si $\lambda_{n-1} = 0$, et qu'elle vaut 1 sinon. Dans ce dernier cas, ce même corollaire implique que la multiplicité de $\Delta(\lambda, -)$ dans $T(\lambda + \varepsilon_n, 0) \otimes T(\varepsilon_1, +)$ est aussi égale à 1. Par conséquent $\Delta(\lambda, -)$ n'apparaît pas dans une bonne filtration de $T(s_0 \cdot \lambda, +)$. \square

3.4.4 Produits tensoriels

On termine ce chapitre par la détermination des multiplicités D_{γ} dans la décomposition

$$\Lambda^l V \otimes T(\beta) = \bigoplus_{\gamma \in C^0} T(\gamma)^{D_{\gamma}} \oplus T$$

3.4. APPLICATION AUX GROUPES CLASSIQUES

avec $T \in \mathcal{I}$. On pourrait les obtenir à l'aide de 3.21 et 3.24, mais on va procéder de manière plus directe. En effet la formule 3.21 est insuffisante lorsque $G = \mathrm{O}(2n)$, mais la proposition 3.26 remédie à ce problème. On énonce d'abord les décompositions sous l'action de G^0 , en remarquant que si $G = \mathrm{O}(2n + 1)$ la situation est particulièrement simple.

Proposition 3.27 *Soient $l \leq \dim V$, $\beta \in C^0$ avec $\beta_n \geq 0$, β demi-entier si $G^0 = \mathrm{Spin}(2n)$ ou $\mathrm{Spin}(2n + 1)$ et $n \geq 3$ si $G^0 = \mathrm{Spin}(2n)$ ou $\mathrm{SO}(2n)$. On a*

$$\mathrm{ch} \Lambda^l V \otimes \Delta(\beta) = \sum_{\gamma \in P^+} C_\gamma \mathrm{ch} \Delta(\gamma),$$

où C_γ est donné par la proposition 2.3, et

$$\Lambda^l V \otimes T(\beta) = \bigoplus_{\gamma \in C^0} T(\gamma)^{D_\gamma} \oplus T$$

avec $T \in \mathcal{I}$ et $D_\gamma = C_\gamma - C_{s_0 \cdot \gamma}$ pour tout $\gamma \in C^0$, en particulier $D_\gamma \leq C_\gamma$ pour tout $\gamma \in C^0$. De plus :

1. Si $G^0 = \mathrm{SO}(2n + 1)$, on a $D_\gamma = C_\gamma$ pour tout $\gamma \in C^0$.
2. Supposons $C_{s_0 \cdot \gamma} \neq 0$ et soit $s_0 \cdot \gamma = \beta + \phi - \psi$ avec les notations de 2.3. On a
 - (a) $(\beta + \rho)(h_0) = p - 1$, $(\gamma + \rho)(h_0) = p - 1$,
 - (b) ε_1 et ε_2 sont des termes de ϕ et ne sont pas des termes de ψ si $G^0 = \mathrm{Sp}(2n)$, $\mathrm{SO}(2n)$ ou $\mathrm{Spin}(2n)$,
 - (c) ε_1 est un terme de ϕ et n'est pas un terme de ψ si $G^0 = \mathrm{Spin}(2n + 1)$.

Démonstration. Soit $\gamma \in P^+$ un poids p -régulier en dehors de l'adhérence de C_{fond} , et notons D_γ la multiplicité de $T(\gamma)$ dans $\Lambda^l V \otimes T(\beta)$. Si $D_\gamma \neq 0$, on a $C_\gamma \neq 0$, $(\beta + \rho)(h_0) \leq p - 1$ et $(\gamma + \rho)(h_0) \geq p + 1$. La combinatoire de 2.3 implique alors $(\gamma + \rho)(h_0) = p + 1$, $(\beta + \rho)(h_0) = p - 1$, et si $\gamma = \beta + \phi - \psi$ on a $\phi(h_0) = 2$ et $\psi(h_0) = 0$, d'où l'assertion sur les termes de ϕ et ψ .

On en déduit $s_0 \cdot \gamma = \gamma - \alpha_0$, ce qui montre que $s_0 \cdot \gamma$ est dans l'adhérence de C_{fond} , et comme $s_0 \cdot \gamma$ est p -régulier, on a en fait $s_0 \cdot \gamma \in C^0$. D'après 3.19 on a alors $\mathrm{ch} T(\gamma) = \mathrm{ch} \Delta(\gamma) + \mathrm{ch} \Delta(s_0 \cdot \gamma)$, ce qui donne

$$\begin{aligned} \mathrm{ch} \Lambda^l V \otimes T(\beta) &= \sum_{\gamma \text{ } p\text{-singulier}} D_\gamma \mathrm{ch} T(\gamma) + \sum_{\gamma \in C^0} D_\gamma \mathrm{ch} T(\gamma) + \sum_{\gamma \in C^0} D_{s_0 \cdot \gamma} \mathrm{ch} T(s_0 \cdot \gamma) \\ &= \sum_{\gamma \text{ } p\text{-singulier}} D_\gamma \mathrm{ch} T(\gamma) + \sum_{\gamma \in C^0} D_\gamma \mathrm{ch} \Delta(\gamma) + \sum_{\gamma \in C^0} D_{s_0 \cdot \gamma} (\mathrm{ch} \Delta(s_0 \cdot \gamma) + \mathrm{ch} \Delta(\gamma)) \\ &= \sum_{\gamma \in C^0} (D_\gamma + D_{s_0 \cdot \gamma}) \mathrm{ch} \Delta(\gamma) + \sum_{\gamma \text{ } p\text{-singulier}} D_\gamma \mathrm{ch} T(\gamma) + \sum_{\gamma \in C^0} D_{s_0 \cdot \gamma} \mathrm{ch} \Delta(s_0 \cdot \gamma). \end{aligned}$$

Soit $\gamma' \in C^0$. De ce qui précède, on déduit que $C_{\gamma'} = D_{\gamma'} + D_{s_0 \cdot \gamma'}$ et $C_{s_0 \cdot \gamma'} = D_{s_0 \cdot \gamma'}$, d'où $D_{\gamma'} = C_{\gamma'} - C_{s_0 \cdot \gamma'}$.

Enfin si $G^0 = \mathrm{SO}(2n + 1)$, on a $(\beta + \rho)(h_0) = 2\beta_1 + 2n - 1$ avec β_1 entier, par conséquent $(\beta + \rho)(h_0)$ est impair alors que $p - 1$ est pair, on n'a donc jamais $(\beta + \rho)(h_0) = p - 1$. \square

CHAPITRE 3. MODULES EN CARACTÉRISTIQUE P

On traite maintenant les groupes simples non connexes. En combinant la proposition précédente et les suites exactes 3.25 et 3.26, on trouve sans difficulté les formules ci-dessous.

Corollaire 3.28 Soient $n \geq 3$, $G = O(2n)$, $l \leq \dim V$ et $\beta \in C^0$ avec $\beta_n \geq 0$.

1. Si $\beta_n \geq 1$, on a

$$\text{ch } \Lambda^l V \otimes \Delta(\beta, 0) = \sum_{\substack{\gamma \in P^+ \\ \gamma_n \geq 1}} C_{(\gamma, 0)} \text{ch } \Delta(\gamma, 0) + \sum_{\substack{\gamma \in P^+ \\ \gamma_n = 0}} C_\gamma (\text{ch } \Delta(\gamma, +) + \text{ch } \Delta(\gamma, -))$$

et

$$\Lambda^l V \otimes T(\beta, 0) = \bigoplus_{\substack{\gamma \in C^0 \\ \gamma_n \geq 1}} T(\gamma, 0)^{D_{(\gamma, 0)}} \oplus \bigoplus_{\substack{\gamma \in C^0 \\ \gamma_n = 0}} (T(\gamma, +) \oplus T(\gamma, -))^{D_\gamma} \oplus T,$$

avec $T \in \mathcal{I}$, $D_{(\gamma, 0)} = C_{(\gamma, 0)} - C_{(s_0 \cdot \gamma, 0)}$ et $D_\gamma = C_\gamma - C_{s_0 \cdot \gamma}$ pour tout $\gamma \in C^0$.

2. Si $\beta_n = 0$, on a

$$\text{ch } \Lambda^l V \otimes \Delta(\beta, +) = \sum_{\substack{\gamma \in P^+ \\ \gamma_n \geq 1}} C_\gamma \text{ch } \Delta(\gamma, 0) + \sum_{\substack{\gamma \in P^+ \\ \gamma_n = 0 \\ \varepsilon = \pm}} C_{(\gamma, \varepsilon)} \text{ch } \Delta(\gamma, \varepsilon)$$

et

$$\Lambda^l V \otimes T(\beta, +) = \bigoplus_{\substack{\gamma \in C^0 \\ \gamma_n \geq 1}} T(\gamma, 0)^{D_{(\gamma, 0)}} \oplus \bigoplus_{\substack{\gamma \in C^0 \\ \gamma_n = 0 \\ \varepsilon = \pm}} (T(\gamma, \varepsilon))^{D_{(\gamma, \varepsilon)}} \oplus T,$$

avec $T \in \mathcal{I}$, $D_{(\gamma, 0)} = C_{(\gamma, 0)} - C_{(s_0 \cdot \gamma, 0)}$ et $D_{(\gamma, \varepsilon)} = C_{(\gamma, \varepsilon)} - C_{(s_0 \cdot \gamma, \varepsilon)}$ pour tout $\gamma \in C^0$ et $\varepsilon = \pm$.

3. Si $C_{(s_0 \cdot \gamma, 0)} \neq 0$, $C_{s_0 \cdot \gamma} \neq 0$ ou $C_{(s_0 \cdot \gamma, \varepsilon)} \neq 0$, on a $(\beta + \rho)(h_0) = p - 1$, $(\gamma + \rho)(h_0) = p - 1$, et si $s_0 \cdot \gamma = \beta + \phi - \psi$ avec les notations de 2.3, ε_1 et ε_2 sont des termes de ϕ et ne sont pas des termes de ψ .

Démonstration. Si $\beta_n \geq 1$, il suffit de remarquer que $C_{(\gamma, 0)}$ (resp. C_γ) est la multiplicité de $\text{ch } \Delta(\gamma)$ (resp. $\text{ch } \Delta(\gamma)$) dans $\text{ch } \Lambda^l V \otimes \Delta(\beta)$ sous G_2^0 , et de même $D_{(\gamma, 0)}$ (resp. D_γ) est la multiplicité de $T(\gamma, 0)$ (resp. $T(\gamma)$) dans $\Lambda^l V \otimes T(\beta)$ sous G_2^0 . Si $\beta_n = 0$, la même remarque vaut pour $C_{(\gamma, 0)}$ et $D_{(\gamma, 0)}$. Enfin on reprend la fin de la preuve de 3.27 en utilisant 3.26 pour trouver $D_{(\gamma, \varepsilon)} = C_{(\gamma, \varepsilon)} - C_{(s_0 \cdot \gamma, \varepsilon)}$. \square

Corollaire 3.29 Soient $n \geq 3$, $G = \text{Pin}(2n)$, $l \leq \dim V$ et $\beta \in C^0$ avec $\beta_n \geq 0$ et β demi-entier. On a

$$\text{ch } \Lambda^l V \otimes \Delta(\beta, 0) = \sum_{\substack{\gamma \in P^+ \\ \gamma_n \geq \frac{1}{2}}} C_{(\gamma, 0)} \text{ch } \Delta(\gamma, 0)$$

3.4. APPLICATION AUX GROUPES CLASSIQUES

et

$$\Lambda^l V \otimes T(\beta, 0) = \bigoplus_{\substack{\gamma \in C^0 \\ \gamma_n \geq \frac{1}{2}}} T(\gamma, 0)^{D_{(\gamma, 0)}} \oplus T,$$

avec $T \in \mathcal{I}$ et $D_{(\gamma, 0)} = C_{(\gamma, 0)} - C_{(s_0 \cdot \gamma, 0)}$ pour tout $\gamma \in C^0$. De plus, si $C_{(s_0 \cdot \gamma, 0)} \neq 0$, on a $(\beta + \rho)(h_0) = p - 1$, $(\gamma + \rho)(h_0) = p - 1$, et si $s_0 \cdot \gamma = \beta + \phi - \psi$ avec les notations de 2.3, ε_1 est un terme de ϕ et n'est pas un terme de ψ .

Démonstration. Notons D_γ (resp. C_γ) la multiplicité de $T(\gamma)$ (resp. $\text{ch } \Delta(\gamma)$) dans $\Lambda^l V \otimes T(\beta)$ (resp. $\text{ch } \Lambda^l V \otimes \Delta(\beta)$) sous G^0 pour tout $\gamma \in P^+$. Il est clair que τ et l'action pointée de s_0 commutent puisque $n \geq 3$, on a donc $D_{(\gamma, 0)} = D_\gamma + D_{\tau(\gamma)} = C_\gamma - C_{s_0 \cdot \gamma} + C_{\tau(\gamma)} - C_{s_0 \cdot \tau(\gamma)} = C_\gamma - C_{s_0 \cdot \gamma} + C_{\tau(\gamma)} - C_{\tau(s_0 \cdot \gamma)} = C_{(\gamma, 0)} - C_{(s_0 \cdot \gamma, 0)}$. \square

Ce corollaire appelle une remarque sur sa traduction en termes de tableaux gauches. Soient donc $n \geq 3$ et $G = \text{Pin}(2n)$. Pour tout poids γ tel que $\gamma_n = \frac{1}{2}$, on rappelle que $\theta(\gamma)$ désigne celui des poids γ ou $\tau(\gamma)$ qui est admissible (cf. définition 2.5). La somme des coordonnées de $s_0 \cdot \gamma - \beta = \gamma - (\gamma + \rho)(h_0)\alpha_0 - \beta$ dans la base des ε_i est congru modulo 2 à celle de $\gamma - \beta$, ainsi γ est admissible si et seulement si $s_0 \cdot \gamma$ l'est, autrement dit $\theta(s_0 \cdot \gamma) = s_0 \cdot \theta(\gamma)$. Comme $\theta(s_0 \cdot \gamma)_n = (s_0 \cdot \theta(\gamma))_n = \theta(\gamma)_n$, on voit que dans la soustraction $C_{(\gamma, 0)} - C_{(s_0 \cdot \gamma, 0)}$, si on traduit les multiplicités en termes de tableaux gauches, tous les tableaux considérés auront un $2\#$ ou aucun d'entre eux n'en aura.

Corollaire 3.30 Soient $G = \text{O}(2n + 1)$, $l \leq \dim V$ et $\beta \in C^0$. On a

$$\text{ch}(\Lambda^l V \otimes \Delta(\beta, +)) = \sum_{\gamma} C_\gamma \text{ch}(\Delta(\gamma, (-1)^l))$$

et

$$\Lambda^l V \otimes T(\beta, +) = \bigoplus_{\gamma \in C^0} T(\gamma, (-1)^l)^{C_\gamma} \oplus T$$

avec $T \in \mathcal{I}$.

La preuve de ce résultat est immédiate. Il nous reste à traiter les groupes non connexes qui ne sont pas simples, à savoir $\text{Pin}(4)$ et $\text{O}(4)$.

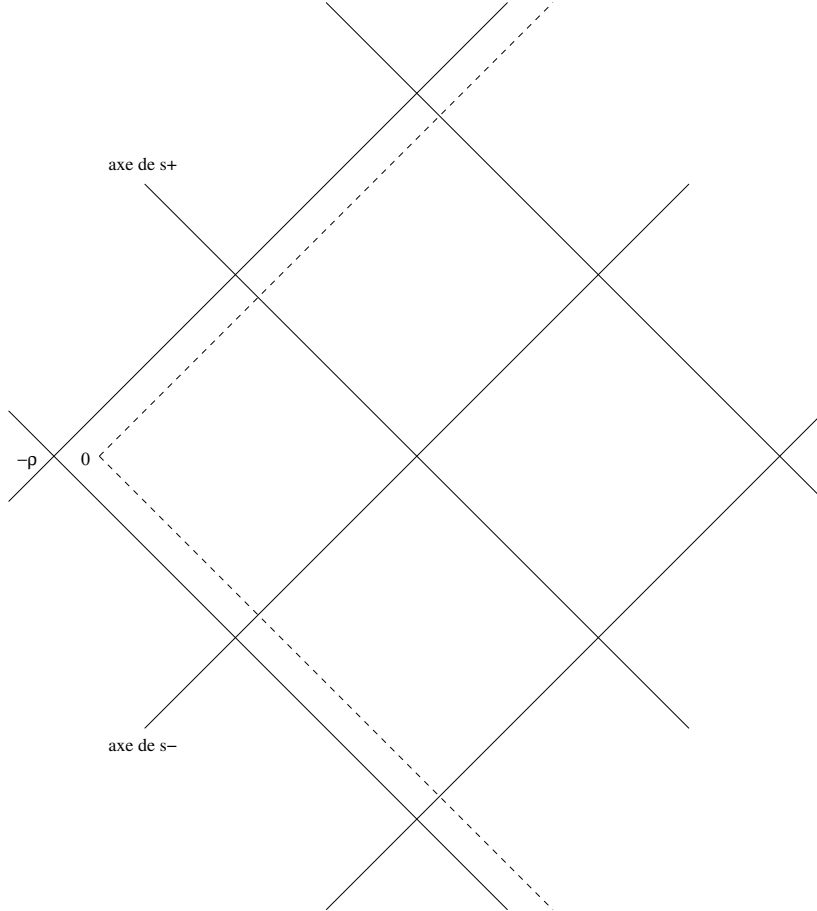
Lemme 3.31 Soient $G = \text{Pin}(4)$ ou $\text{O}(4)$, $l \leq 4$, $\beta, \gamma \in C^0$ avec $\beta_2 \geq 0, \gamma_2 \geq 0$, et β, γ demi-entiers si $G = \text{Pin}(4)$. Avec les notations des corollaires précédents :

1. Soit $G = \text{Pin}(4)$. On a $D_{(\gamma, 0)} = C_{(\gamma, 0)}$ si $\gamma \neq \beta$, $D_{(\beta, 0)} = C_{(\beta, 0)} - 1$ si ($l = 2$ et $\beta_1 + \beta_2 = p - 2$) et $D_{(\beta, 0)} = C_{(\beta, 0)}$ sinon.
2. Soit $G = \text{O}(4)$ et $\beta_2 \geq 1$. On a $D_{(\gamma, 0)} = C_{(\gamma, 0)}$ si $\gamma \neq \beta$ et $\gamma_2 \geq 1$, $D_{(\gamma, \pm)} = C_{(\gamma, \pm)}$ si $\gamma_2 = 0$, $D_{(\beta, 0)} = C_{(\beta, 0)} - 1$ si ($l = 2$ et $\beta_1 + \beta_2 = p - 2$) et $D_{(\beta, 0)} = C_{(\beta, 0)}$ sinon.

CHAPITRE 3. MODULES EN CARACTÉRISTIQUE P

3. Soit $G = \mathrm{O}(4)$ et $\beta_2 = 0$. On a $D_{(\gamma, \pm)} = C_{(\gamma, \pm)}$ si $\gamma \neq \beta$ et $\gamma_2 = 0$, $D_{(\gamma, 0)} = C_{(\gamma, 0)}$ si $\gamma_2 \geq 1$, $D_{(\beta, \pm)} = 0$ si ($l = 2$ et $\beta_1 + \beta_2 = p - 2$) et $D_{(\beta, \pm)} = C_{(\beta, \pm)}$ sinon.

Démonstration. On représente sur le dessin suivant le système d'alcôves pour $\mathrm{SO}(4)$ et p fixé, ainsi que le cône des poids dominants.



Soit h_+ (resp. h_-) la coracine de $2\omega_+ = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ (resp. $2\omega_- = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$). On définit deux réflexions affines s_+ et s_- de W_{aff} par $s_+(\lambda) = \lambda - (\lambda(h_+) - p)2\omega_+$ et $s_-(\lambda) = \lambda - (\lambda(h_-) - p)2\omega_-$. Remarquons que la suite exacte 3.19 reste valable pour le groupe $\mathrm{Spin}(4) = \mathrm{SL}(2) \times \mathrm{SL}(2)$ et pour $\mathrm{SO}(4)$ à condition de remplacer s_0 par s_+ ou s_- . Notons D_η (resp. C_η) la multiplicité de $T(\eta)$ (resp. $\mathrm{ch} \Delta(\eta)$) dans $\Lambda^l V \otimes T(\beta)$ (resp. $\mathrm{ch} \Lambda^l V \otimes \Delta(\beta)$) sous G^0 pour tout $\eta \in P^+$. Si $C_\eta \neq 0$ et η est en dehors de l'adhérence de C_{fond} , alors $l = 2$, $\beta_1 + \beta_2 = p - 2$, $\eta = s_\pm \cdot \beta = \beta + \varepsilon_1 \pm \varepsilon_2$ avec $\eta_1 + |\eta_2| = p$ et $C_\eta = 1$. On a donc $\eta_1 = \beta_1 + 1$ et $|\eta_2| = |\beta_2 \pm 1| = \beta_2 + 1$, et on en déduit que si $\beta_2 \neq 0$, alors $\eta = \beta + \varepsilon_1 + \varepsilon_2$.

Supposons $\beta_2 \neq 0$. La preuve de 3.27 reste valable en remplaçant s_0 et h_0 par s_+ et h_+ . On a $D_\gamma = C_\gamma$ pour tout $\gamma \in C^0$ distinct de β , $D_\beta = C_\beta - 1$ si ($l = 2$ et $\beta_1 + \beta_2 = p - 2$) et $D_\beta = C_\beta$ sinon. Soit $G = \mathrm{Pin}(4)$ et soit γ vérifiant les hypothèses

3.4. APPLICATION AUX GROUPES CLASSIQUES

de l'énoncé. Si $\gamma = \beta$ et ($l = 2$ et $\beta_1 + \beta_2 = p - 2$), on a $D_{(\gamma,0)} = D_\gamma + D_{\tau(\gamma)} = C_\gamma - 1 + C_{\tau(\gamma)} = C_{(\gamma,0)} - 1$. Sinon, $D_{(\gamma,0)} = D_\gamma + D_{\tau(\gamma)} = C_\gamma + C_{\tau(\gamma)} = C_{(\gamma,0)}$. Si $G = O(4)$ on a $D_{(\gamma,0)} = D_\gamma$ et $C_{(\gamma,0)} = C_\gamma$, d'où les formules voulues.

Si $\beta_2 = 0$, ce qui implique $G = O(4)$, on sait que $D_\gamma = C_\gamma$ sauf si $l = 2$ et $\beta_1 + \beta_2 = p - 2$. Supposons maintenant $l = 2$ et $\beta_1 + \beta_2 = p - 2$. On pose $\Gamma_1 = \beta + \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ et $\Gamma_2 = \beta + \varepsilon_1 - \varepsilon_2$. Si $\eta \in P^+$ est tel que $D_\eta \neq 0$ et η n'est pas dans l'adhérence de C_{fond} , on a $\eta = \Gamma^1$ ou $\eta = \Gamma^2$. Comme $C_{\Gamma_1} = C_{\Gamma_2} = 1$, on en déduit $D_{\Gamma_1} = 1$ ou $D_{\Gamma_2} = 1$. Or la représentation $\Lambda^l V \otimes T(\beta)$ est invariante quand on la tord par σ , on a donc $D_\eta = D_{\tau(\eta)}$ pour tout poids η dominant, en particulier $D_{\Gamma_1} = D_{\Gamma_2} = 1$. Comme $C_\beta = 2$, la suite exacte 3.19 avec s_0 remplacé par s_+ ou s_- montre que $D_\beta = 0$ et $D_\gamma = C_\gamma$ si $\gamma \neq \beta$. On en déduit immédiatement les formules pour $O(4)$. \square

CHAPITRE 3. MODULES EN CARACTÉRISTIQUE P

Chapitre 4

Paires duales

Un exemple particulièrement connu de paire duale est la paire $(GL(m), S_n)$, qui relie les représentations de $GL(m)$ à celles du groupe symétrique S_n via la célèbre dualité de Schur-Weyl. Nous étudions une dualité analogue pour des paires (G_1, G_2) de groupes algébriques en suivant la méthode exposée dans [37] et [38].

On rappelle dans une première section la définition d'une paire duale, et on montre brièvement comment cette dualité échange les dimensions de certains G_1 -modules simples et certaines multiplicités de G_2 -modules indécomposables, via une correspondance qu'on note $\lambda \leftrightarrow \tilde{\lambda}$. Puis on explicite cinq paires duales construites par Adamovich et Rybnikov [2] à l'aide du module simple de l'algèbre de Clifford de $V_1 \otimes V_2$, V_1 et V_2 étant respectivement les représentations naturelles de G_1 et G_2 . On précise pour chaque paire duale la correspondance $\lambda \leftrightarrow \tilde{\lambda}$, et on montre enfin comment le calcul du caractère de certaines représentations irréductibles de G_1 se ramène à la décomposition de certains G_2 -modules basculants, à savoir des produits tensoriels de puissances extérieures de V_2 , en somme directe de G_2 -modules basculants indécomposables.

Les résultats de ce chapitre sont valables en toute caractéristique, sauf mention explicite du contraire. Pour clarifier l'écriture, si $i = 1, 2$, on met un i en indice pour indiquer à quel groupe on se réfère. Ainsi P_1^+ désigne le cône des poids dominants de G_1 , etc.

4.1 Principe de dualité

Définition 4.1 (Howe) [22] *Soient G_1, G_2 deux groupes, M un $G_1 \times G_2$ -module et soient $\phi_i : G_i \rightarrow GL(M)$ les morphismes de groupes correspondants. On dit que M est une (G_1, G_2) paire duale si l'algèbre $\text{End}_{G_1}(M)$ est engendré par $\phi_2(G_2)$ et si l'algèbre $\text{End}_{G_2}(M)$ est engendré par $\phi_1(G_1)$.*

Plaçons nous en caractéristique zéro, et soient G_1, G_2 connexes et semi-simples. On considère une (G_1, G_2) paire duale M . Soit E (resp. F) l'ensemble des poids $\lambda \in P_1^+$ (resp. P_2^+) tels que $L_1(\lambda)$ (resp. $L_2(\lambda)$) est facteur direct du G_1 -module

(resp. G_2 -module) M . Un résultat bien connu donne la décomposition du $G_1 \times G_2$ -module M .

Proposition 4.2 *Il existe une bijection $\lambda \mapsto \tilde{\lambda}$ de E sur F telle qu'on ait*

$$M = \bigoplus_{\lambda \in E} L_1(\lambda) \otimes L_2(\tilde{\lambda}).$$

Démonstration. A priori on a seulement $M = \bigoplus_{(\lambda_1, \lambda_2) \in E \times F} (L_1(\lambda_1) \otimes L_2(\lambda_2))^{m_{\lambda_1, \lambda_2}}$. Si on montre que pour tout $\lambda_2 \in F$, le G_1 -module $H^0(U_2, M)_{\lambda_2} = \bigoplus_{\lambda_1} L_1(\lambda_1)^{m_{\lambda_1, \lambda_2}}$ est simple, on en déduit $M = \bigoplus_{\lambda_2 \in F} L_1(\theta(\lambda_2)) \otimes L_2(\lambda_2)$ pour une certaine fonction θ . Par symétrie on trouve une fonction ψ telle que $M = \bigoplus_{\lambda_1 \in E} L_1(\lambda_1) \otimes L_2(\psi(\lambda_1))$, ce qui permet de conclure.

On est donc réduit à montrer que, pour tout λ_2 tel que $H^0(U_2, M)_{\lambda_2}$ est non nul, le G_1 -module $H^0(U_2, M)_{\lambda_2}$ est simple. Posons $C = \text{End}_{G_2}(M)$. Il suffit d'établir que $H^0(U_2, M)_{\lambda_2}$ est un C -module simple. Si on écrit $M = \bigoplus_{\mu} L_2(\mu)^{m_{\mu}}$, on a $H^0(U_2, M)_{\lambda_2} = H^0(U_2, L_2(\lambda_2)^{m_{\lambda_2}})_{\lambda_2} = K^{m_{\lambda_2}}$ et $C = \bigoplus_{\mu} \text{End}_{G_2}(L_2(\mu)^{m_{\mu}})$. On doit donc vérifier que $H^0(U_2, L_2(\lambda_2)^{m_{\lambda_2}})_{\lambda_2}$ est un $\text{End}_{G_2}(L_2(\lambda_2)^{m_{\lambda_2}})$ -module simple. Il est clair que pour tout $A \in \text{End}(K^{m_{\lambda_2}})$, il existe une matrice $A' \in \text{End}_{G_2}(L_2(\lambda_2)^{m_{\lambda_2}})$, constituée de blocs diagonaux, qui agit par A sur $H^0(U_2, M)_{\lambda_2}$, d'où le résultat. \square

Supposons maintenant que $K = \overline{\mathbb{F}_p}$, et soit M une (G_1, G_2) paire duale. On note A (resp. B) la sous-algèbre des endomorphismes de M engendrée par l'action de G_1 (resp. G_2). Comme B -module, on a $M = \bigoplus_{i \in I} S^{(i)} \otimes I^{(i)}$, où les $I^{(i)}$ sont des

B -modules indécomposables distincts et les $S^{(i)}$ sont des espaces vectoriels. Par construction, la dimension de S_i est égale à la multiplicité de $I^{(i)}$ comme facteur direct du B -module M . On pose $A^0 = \bigoplus_{i \in I} \text{End} S_i$. Cette algèbre A^0 est semi-simple, les S_i sont les A^0 -modules simples, et A^0 est une sous-algèbre de $A = \text{End}_B(M)$. On peut montrer que $A = A^0 \oplus R$, où R est le radical de A . Par conséquent les A -modules simples s'identifient aux A^0 -modules simples. Il en résulte en particulier que la dimension du G_1 -module simple $S^{(i)}$ est la multiplicité de $I^{(i)}$ comme facteur direct du G_2 -module M . Les paires duales échangent donc les dimensions des G_1 -modules simples et les multiplicités des G_2 -modules indécomposables, et c'est cette propriété qui va nous permettre d'obtenir des formules de caractères en caractéristique p .

A titre d'exemple, on esquisse le traitement de la $(\text{Sp}(2m), \text{Sp}(2n))$ paire duale en caractéristique zéro. On pose $G_1 = \text{Sp}(2m)$, $G_2 = \text{Sp}(2n)$, et pour $i \in \{1, 2\}$, on note V_i la représentation naturelle de G_i et b_i la forme alternée non dégénérée sur V_i . On munit $V_1 \otimes V_2$ du produit scalaire $b_1 \otimes b_2$ et on note S la représentation simple de $\text{Cliff}(V_1 \otimes V_2)$. Il est clair que $\text{Sp}(2m) \times \text{Sp}(2n)$ agit sur $V_1 \otimes V_2$ par des transformations orthogonales, et comme ce groupe est connexe, ces transformations sont de déterminant égal à 1. Le groupe $\text{Sp}(2m) \times \text{Sp}(2n)$ étant simplement connexe, cette action se relève en un morphisme de groupes $\text{Sp}(2m) \times \text{Sp}(2n) \rightarrow \text{Spin}(V_1 \otimes V_2) \subset \text{Cliff}(V_1 \otimes V_2)$, comme illustré ci-dessous.

4.2. CINQ PAIRES DUALES

$$\text{Spin}(V_1 \otimes V_2)$$

$$\text{Sp}(2m) \times \text{Sp}(2n) \quad \text{SO}(V_1 \otimes V_2)$$

Il en résulte une structure de $\text{Sp}(2m) \times \text{Sp}(2n)$ -module sur S , et on montre que S est une $(\text{Sp}(2m), \text{Sp}(2n))$ paire duale. En tant que $\text{Sp}(2n)$ -module, S s'identifie à $(\Lambda V_2)^{\otimes m}$. On déduit du théorème que la dimension de $L_1(\lambda)$ est la multiplicité de $L_2(\lambda)$ dans le $\text{Sp}(2n)$ -module $(\Lambda V_2)^{\otimes m}$, et la proposition 2.3 permet de calculer cette multiplicité pourvu qu'on connaisse $\tilde{\lambda}$. On peut même raffiner cette technique pour obtenir le caractère de $L_1(\lambda)$, comme on le verra dans les sections suivantes.

4.2 Cinq paires duales

Le corps de base K est à nouveau de caractéristique quelconque, et on procède comme suit. A chaque paire (G_1, G_2) , on associe un espace muni d'une forme quadratique Q , et on note $C(Q)$ son algèbre de Clifford ou la partie paire de l'algèbre de Clifford suivant le cas. On construit deux réalisations du module simple de $C(Q)$, l'une étant de manière naturelle un G_1 -module et l'autre étant de manière naturelle un G_2 -module. Par transport de structure, on obtient un (G_1, G_2) -module \mathbb{M} qui est en fait une (G_1, G_2) paire duale.

On reprend ici certaines des paires duales de [2]. Sur chaque ligne du tableau suivant, on trouve une paire de groupes (G_1, G_2) et deux espaces vectoriels N_1 et N_2 . Le groupe G_1 (resp. G_2) dépend du paramètre m (resp. n), la base (z_1, \dots, z_{-1}) définie au premier chapitre est notée (x_1, \dots, x_{-1}) (resp. (y_1, \dots, y_{-1})) et V_1 (resp. V_2) désigne la représentation naturelle de G_1 (resp. G_2). On note également V_{1+} (resp. V_{1-}) l'espace vectoriel engendré par x_1, \dots, x_m (resp. x_{-1}, \dots, x_{-m}) et V_{2+} (resp. V_{2-}) l'espace vectoriel engendré par y_1, \dots, y_n (resp. y_{-1}, \dots, y_{-n}).

G_1	G_2	N_1	N_2
$\text{Sp}(2m)$	$\text{Sp}(2n)$	$V_1 \otimes V_{2-}$	$V_{1-} \otimes V_2$
$\text{SO}(2m+1)$	$\text{Pin}(2n)$	$V_1 \otimes V_{2-}$	$(V_{1-} \otimes V_2) \oplus (Kx_0 \otimes V_{2-})$
$\text{SO}(2m)$	$\text{O}(2n)$	$V_1 \otimes V_{2-}$	$V_{1-} \otimes V_2$
$\text{Spin}(2m+1)$	$\text{Spin}(2n+1)$	$(V_1 \otimes V_{2-}) \oplus (V_{1-} \otimes Ky_0)$	$(V_{1-} \otimes V_2) \oplus (Kx_0 \otimes V_{2-})$
$\text{Spin}(2m)$	$\text{O}(2n+1)$	$(V_1 \otimes V_{2-}) \oplus (V_{1-} \otimes Ky_0)$	$V_{1-} \otimes V_2$

Chaque ligne correspond à une (G_1, G_2) paire duale \mathbb{M} qu'on va définir à l'aide des espaces N_1 et N_2 . Ces paires duales sont soumises à quelques restrictions : on ne considère que des poids demi-entiers si le groupe considéré est un groupe spin ou $\text{Pin}(2n)$, p est supposé impair lorsque la paire duale n'est pas la paire symplectique, et on suppose $n \geq 2$ quand on utilise les groupes $\text{O}(2n)$ ou $\text{Pin}(2n)$. Cette dernière condition n'est en fait nécessaire qu'en caractéristique p , l'alcôve fondamentale n'étant pas définie si $n = 1$.

On munit $V_1 \otimes V_2$ d'une forme quadratique non dégénérée Q définie comme suit. On note b_1 la forme bilinéaire alternée (resp. la polarisation de la forme quadratique) de V_1 lorsque $G_1 = \text{Sp}(2m)$ (resp. $G_1 \neq \text{Sp}(2m)$), et on définit de même b_2 . On pose

$$Q\left(\sum_{j=-n}^n v_j \otimes y_j\right) = \sum_{j=1}^n b_1(v_j, v_{-j}) \text{ si } G_2 = \text{Sp}(2n), \text{Spin}(2n) \text{ ou } \text{O}(2n),$$

et $Q\left(\sum_{j=-n}^n v_j \otimes y_j\right) = \sum_{j=1}^n b_1(v_j, v_{-j}) - b_1(v_0, v_0)$ si $G_2 = \text{Spin}(2n+1)$ ou $\text{O}(2n+1)$.

On voit facilement que la polarisation de Q est $b_1 \otimes b_2$ et que Q peut également être définie par la formule

$$Q\left(\sum_{j=-m}^m x_j \otimes w_j\right) = \sum_{j=1}^m b_2(w_j, w_{-j}) \text{ si } G_1 = \text{Sp}(2m), \text{SO}(2m) \text{ ou } \text{Spin}(2m),$$

et $Q\left(\sum_{j=-m}^m x_j \otimes w_j\right) = \sum_{j=1}^m b_2(w_j, w_{-j}) - b_2(w_0, w_0)$ si $G_1 = \text{Spin}(2m+1)$ ou $\text{SO}(2m+1)$.

Si $G_1 \neq \text{Spin}(2m+1)$, on peut décomposer $V_1 \otimes V_2$, de dimension paire, en somme directe de sous-espaces totalement isotropes maximaux. Si $G_1 = \text{Spin}(2m+1)$, $V_1 \otimes V_2$ est de dimension impaire et on a $V_1 \otimes V_2 = K(x_0 \otimes y_0) \oplus N$ où N est l'orthogonal de $K(x_0 \otimes y_0)$, c'est-à-dire le sous-espace de $V_1 \otimes V_2$ engendré par les $x_i \otimes y_j$, $(i, j) \neq (0, 0)$. On peut décomposer N en somme directe de sous-espaces totalement isotropes maximaux. On donne ci-dessous, pour chaque groupe, deux telles décompositions :

1. Si $G_1 = \text{Sp}(2m)$ ou $G_1 = \text{SO}(2m)$, on a $V_1 \otimes V_2 = N_1 \oplus (V_1 \otimes V_{2+})$ et $V_1 \otimes V_2 = N_2 \oplus (V_{1+} \otimes V_2)$.
2. Si $G_1 = \text{SO}(2m+1)$, on a $V_1 \otimes V_2 = N_1 \oplus (V_1 \otimes V_{2+})$ et $V_1 \otimes V_2 = N_2 \oplus ((V_{1+} \otimes V_2) \oplus (Kx_0 \otimes V_{2+}))$.
3. Si $G_1 = \text{Spin}(2m+1)$, on a $N = N_1 \oplus ((V_1 \otimes V_{2+}) \oplus (V_{1+} \otimes Ky_0))$ et $N = N_2 \oplus ((V_{1+} \otimes V_2) \oplus (Kx_0 \otimes V_{2+}))$.
4. Si $G_1 = \text{Spin}(2m)$, on a $V_1 \otimes V_2 = N_1 \oplus ((V_1 \otimes V_{2+}) \oplus (V_{1+} \otimes Ky_0))$ et $V_1 \otimes V_2 = N_2 \oplus (V_{1+} \otimes V_2)$.

On pose $C(Q) = \text{Cliff}(V_1 \otimes V_2)$ si $G_1 \neq \text{Spin}(2m+1)$ et $C(Q) = \text{Cliff}_+(V_1 \otimes V_2) \simeq \text{Cliff}(N)$ sinon. On a vu que ΛN_1 et ΛN_2 sont des $C(Q)$ -modules simples, et l'algèbre $C(Q)$ a un unique module simple. Il existe donc, à multiplication par un scalaire près, un unique $C(Q)$ -isomorphisme φ entre ΛN_1 et ΛN_2 . Par ailleurs, pour chacune des paires (G_1, G_2) , ΛN_1 est un G_1 -module et ΛN_2 un G_2 -module : si $G_2 = \text{Pin}(2n)$ ou $\text{Spin}(2n+1)$, on a un isomorphisme vectoriel naturel entre ΛN_2 et $(\Lambda V_2)^{\otimes m} \otimes \Lambda V_{2-}$. Comme $\Lambda V_{2-} = S$ est la représentation spin de G_2 , on peut munir ΛN_2 d'une structure de G_2 -module. On fait de même pour $G_1 = \text{Spin}(2m)$ ou $\text{Spin}(2m+1)$. Ainsi l'isomorphisme φ fait de ΛN_1 et ΛN_2 des (G_1, G_2) -modules isomorphes par transport de structure, et on désigne par \mathbb{M} ce (G_1, G_2) -module. On rappelle que pour tout G -module M , on appelle commutant de M l'algèbre $\text{End}_G(M)$.

Théorème 4.3 [2] \mathbb{M} est un $G_1 \times G_2$ -module. De plus, \mathbb{M} est un G_2 -module (resp. G_1 -module) basculant dont le commutant est engendré par l'action de G_1 (resp. G_2).

4.2. CINQ PAIRES DUALES

En particulier, \mathbb{M} est une (G_1, G_2) paire duale. Notons que la $(\mathrm{SO}(2m+1), \mathrm{Pin}(2n))$ paire duale est aussi une $(\mathrm{O}(2m+1), \mathrm{Spin}(2n))$ paire duale, et la $(\mathrm{SO}(2m), \mathrm{O}(2n))$ paire duale est aussi une $(\mathrm{O}(2m), \mathrm{SO}(2n))$ paire duale. Ce constat sera utile au dernier chapitre, où on a besoin de (G_1, G_2) paires duales avec G_2 connexe. Notons également que ces deux “nouvelles” paires duales n’en sont pas, puisqu’en permutant G_1 et G_2 on les retrouve dans notre tableau.

On peut expliciter l’isomorphisme φ à l’aide du lemme et de la proposition qui suivent.

Lemme 4.4 *Il existe un unique $C(Q)$ -isomorphisme φ de ΛN_1 sur ΛN_2 qui envoie 1 sur $\wedge_{i=-1}^{-m} \wedge_{j=1}^n x_i \otimes y_j$.*

Démonstration. On sait déjà qu’il existe, à multiplication par un scalaire près, un unique $C(Q)$ -isomorphisme φ entre ΛN_1 et ΛN_2 , il nous faut donc simplement calculer $\varphi(1)$. On définit deux éléments v, v' de $C(Q)$ comme suit :

1. v' est le produit des $x_i \otimes y_j \in N_1 \cap N_2$.
2. v est le produit des $x_i \otimes y_j \in N_1 \setminus N_1 \cap N_2$, c’est-à-dire le produit des $x_i \otimes y_j \in V_{1+} \otimes V_{2-}$.

On veut montrer que $\varphi(1)$ est le produit des $x_i \otimes y_j \in N_2 \setminus N_1 \cap N_2$, c’est-à-dire le produit des $x_i \otimes y_j \in V_{1-} \otimes V_{2+}$. En utilisant les résultats du premier chapitre, on voit que v agit par multiplication extérieure sur ΛN_1 et par dérivation sur ΛN_2 , et v' agit par multiplication extérieure sur ΛN_1 et ΛN_2 . On a donc $v \cdot 1 \neq 0$, d’où $v \cdot \varphi(1) = \varphi(v \cdot 1) \neq 0$, et de même $v' \cdot \varphi(1) \neq 0$. En considérant l’action de v sur ΛN_2 , il vient $\varphi(1) = (\wedge_{i=-1}^{-m} \wedge_{j=1}^n x_i \otimes y_j) \wedge w$ avec $w \in \Lambda N_2$, et l’action de v' sur ΛN_2 montre que w est scalaire. \square

Proposition 4.5 *Soit*

$$u = \left(\bigwedge_{(i,j) \in \Omega_1} x_i \otimes y_j \right) \wedge \left(\bigwedge_{(i,j) \in \Omega_2} x_i \otimes y_j \right) \in \Lambda N_1$$

avec

$$\begin{aligned} \Omega_1 &\subset \{-1, \dots, -m\} \times \{-1, \dots, -n\} \text{ si } G_1 = \mathrm{Sp}(2m) \text{ ou } G_1 = \mathrm{SO}(2m), \\ \Omega_1 &\subset \{0, \dots, -m\} \times \{-1, \dots, -n\} \text{ si } G_1 = \mathrm{SO}(2m+1), \\ \Omega_1 &\subset \{-1, \dots, -m\} \times \{0, \dots, -n\} \text{ si } G_1 = \mathrm{Spin}(2n), \\ \Omega_1 &\subset \{0, \dots, -m\} \times \{-1, \dots, -n\} \cup \{-1, \dots, -m\} \times \{0\} \text{ si } G_1 = \mathrm{Spin}(2m+1), \\ \Omega_2 &\subset \{1, \dots, m\} \times \{-1, \dots, -n\}, \\ \Omega &= \{-1, \dots, -m\} \times \{1, \dots, n\}. \end{aligned}$$

Alors

$$\varphi(u) = \pm \left(\bigwedge_{(i,j) \in \Omega_1} x_i \otimes y_j \right) \wedge \left(\bigwedge_{(i,j) \in \Omega \setminus -\Omega_2} x_i \otimes y_j \right) \in \Lambda N_2.$$

Démonstration. Dans chaque cas, Ω_1 (resp. Ω_2) est l'ensemble des indices (i, j) tels que $x_i \otimes y_j$ figure dans u et $x_i \otimes y_j \in N_1 \cap N_2$ (resp. $N_1 \setminus N_1 \cap N_2$). On peut écrire

$$u = \left(\prod_{(i,j) \in \Omega_1} x_i \otimes y_j \right) \cdot \left(\prod_{(i,j) \in \Omega_2} x_i \otimes y_j \right) \cdot 1,$$

$$\varphi(u) = \left(\prod_{(i,j) \in \Omega_1} x_i \otimes y_j \right) \cdot \left(\prod_{(i,j) \in \Omega_2} x_i \otimes y_j \right) \cdot \varphi(1) \in \Lambda N_2.$$

Notons que les différents facteurs du produit $\left(\prod_{(i,j) \in \Omega_1} x_i \otimes y_j \right) \cdot \left(\prod_{(i,j) \in \Omega_2} x_i \otimes y_j \right) \in C(Q)$ anticommulent entre eux, l'ordre des facteurs n'a donc pas d'importance au vu du résultat qu'on souhaite démontrer. Dans ΛN_2 , le produit $\prod_{(i,j) \in \Omega_2} x_i \otimes y_j$ agit par dérivation et le produit $\prod_{(i,j) \in \Omega_1} x_i \otimes y_j$ par multiplication extérieure. Comme $\varphi(1) = \wedge_{i=-m}^{-1} \wedge_{j=1}^n x_i \otimes y_j$, on obtient la formule voulue. \square

On énonce maintenant un résultat technique sur le comportement de l'isomorphisme φ par rapport aux sommes directes. Ce résultat intervient uniquement dans la démonstration de la proposition 7.3, et on pourrait en fait s'en passer. C'est pourquoi on se contente de l'énoncer pour la paire $(G_1, G_2) = (\mathrm{Sp}(2m), \mathrm{Sp}(2n))$.

Soit $1 \leq k \leq m$. On note $U_{k,+}$ (resp. $\overline{U}_{k,+}$) le sous-espace de V_{1+} engendré par (x_1, \dots, x_k) (resp. (x_{k+1}, \dots, x_m)), et on note $U_{k,-}$ (resp. $\overline{U}_{k,-}$) le sous-espace de V_{1-} engendré par (x_{-1}, \dots, x_{-k}) (resp. $(x_{-k-1}, \dots, x_{-m})$). Posons $U_k = U_{k,+} \oplus U_{k,-}$, $\overline{U}_k = \overline{U}_{k,+} \oplus \overline{U}_{k,-}$. Soit φ_m (resp. $\varphi_k, \overline{\varphi}_k$) l'isomorphisme $\Lambda(V_1 \otimes V_{2-}) \xrightarrow{\varphi_m} \Lambda(V_{1-} \otimes V_2)$ (resp. $\Lambda(U_k \otimes V_{2-}) \xrightarrow{\varphi_k} \Lambda(U_{k,-} \otimes V_2)$, $\Lambda(\overline{U}_k \otimes V_{2-}) \xrightarrow{\overline{\varphi}_k} \Lambda(\overline{U}_{k,-} \otimes V_2)$) qui envoie 1 sur $\wedge_{i=-1}^{-m} \wedge_{j=1}^n x_i \otimes y_j$ (resp. $\wedge_{i=-1}^{-k} \wedge_{j=1}^n x_i \otimes y_j$, $\wedge_{i=-k-1}^{-m} \wedge_{j=1}^n x_i \otimes y_j$). On a un isomorphisme canonique entre $\Lambda(V_1 \otimes V_{2-})$ et $\Lambda(U_k \otimes V_{2-}) \otimes \Lambda(\overline{U}_k \otimes V_{2-})$, ainsi qu'entre $\Lambda(V_{1-} \otimes V_2)$ et $\Lambda(U_{k,-} \otimes V_2) \otimes \Lambda(\overline{U}_{k,-} \otimes V_2)$. On a donc un diagramme (non commutatif)

$$\begin{array}{ccc} \Lambda(U \otimes V_{2-}) \otimes \Lambda(\overline{U}_k \otimes V_{2-}) & \simeq & \Lambda(V_1 \otimes V_{2-}) \\ \downarrow \varphi_k \otimes \overline{\varphi}_k & & \varphi_m \downarrow \\ \Lambda(U_{k,-} \otimes V_2) \otimes \Lambda(\overline{U}_{k,-} \otimes V_2) & \simeq & \Lambda(V_{1-} \otimes V_2) \end{array}$$

De la proposition précédente on déduit immédiatement le lemme qui suit.

Lemme 4.6 *Si on identifie de manière canonique $\Lambda(V_1 \otimes V_{2-})$ avec $\Lambda(U_k \otimes V_{2-}) \otimes \Lambda(\overline{U}_k \otimes V_{2-})$ et $\Lambda(V_{1-} \otimes V_2)$ avec $\Lambda(U_{k,-} \otimes V_2) \otimes \Lambda(\overline{U}_{k,-} \otimes V_2)$, alors on a*

$$(\varphi_k \otimes \overline{\varphi}_k) \left(\left(\wedge_{(i,j) \in \Omega_k} x_i \otimes y_j \right) \otimes \left(\wedge_{(i,j) \in \overline{\Omega}_k} x_i \otimes y_j \right) \right) = \pm \varphi_m \left(\wedge_{(i,j) \in \Omega_m} x_i \otimes y_j \right)$$

pour tous $\Omega_k \subset \{-k, \dots, k\} \times \{-1, \dots, -n\}$,
 $\overline{\Omega}_k \subset \{-m, \dots, -k-1, k+1, \dots, m\} \times \{-1, \dots, -n\}$
 et $\Omega_m = \Omega_k \cup \overline{\Omega}_k$.

4.3 La correspondance $\lambda \leftrightarrow \tilde{\lambda}$

On définit maintenant la bijection $\lambda \leftrightarrow \tilde{\lambda}$ entre certains poids dominants de G_1 et de G_2 . On prendra garde que pour le groupe $O(2n+1)$, on utilise σ et non pas σ_c pour décrire ses représentations (voir la fin du paragraphe 1.3.2). Soit λ un poids dominant de G_1 tel qu'on ait $\lambda_1 \leq n + \frac{1}{2}$. Cela signifie qu'on a l'inclusion $Y(\lambda) \subset R(m, n)$, où $R(m, n)$ est un rectangle de m lignes et n colonnes. Soit \mathcal{C} le

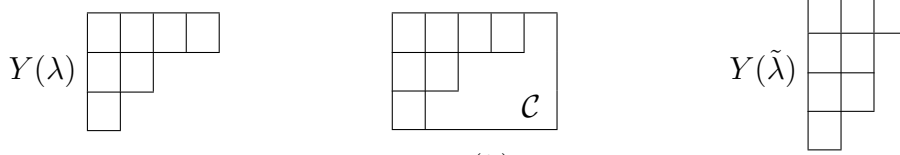
4.3. LA CORRESPONDANCE $\lambda \leftrightarrow \tilde{\lambda}$

complémentaire de $Y(\lambda)$ dans $R(m, n)$. En lui appliquant une symétrie par rapport à la seconde diagonale on trouve un diagramme de Young \tilde{Y} , comme le montre l'exemple suivant. On définit le poids dominant $\tilde{\lambda}$ de G_2 comme suit.

1. Si $G_2 = \text{Sp}(2n)$ ou $\text{Spin}(2n + 1)$, il existe un unique poids dominant $\tilde{\lambda}$ (demi-entier si $G_2 = \text{Spin}(2n + 1)$) de G_2 de diagramme \tilde{Y} .
2. Si $G_2 = \text{Pin}(2n)$, on choisit l'unique poids $\tilde{\lambda}$ de $\text{Spin}(2n)$ qui soit demi-entier et qui vérifie $\tilde{\lambda}_n > 0$ et $Y(\tilde{\lambda}) = \tilde{Y}$.
3. Si $G_2 = \text{O}(2n)$, notons η l'unique poids dominant de G_2^0 tel que $\eta_n \geq 0$ et $Y(\eta) = \tilde{Y}$, et remarquons que $\lambda_n = 0$ si et seulement si $\eta_n > 0$. On pose $\tilde{\lambda} = \eta$ si $\lambda_n = 0$, $\tilde{\lambda} = (\eta, +)$ si $\lambda_n > 0$ et $\tilde{\lambda} = (\eta, -)$ si $\lambda_n < 0$.
4. Si $G_2 = \text{O}(2n + 1)$ et η est l'unique poids dominant de G_2^0 tel que $Y(\eta) = \tilde{Y}$, on pose $\tilde{\lambda} = (\eta, +)$ si $\lambda_n > 0$ et $\tilde{\lambda} = (\eta, -)$ si $\lambda_n < 0$.

On a ainsi une bijection entre les poids dominants λ de G_1 tels que $Y(\lambda) \subset R(m, n)$ et les poids dominants $\tilde{\lambda}$ de G_2 tels que $Y(\tilde{\lambda}) \subset R(n, m)$ (et qui sont demi-entiers si $G_2 = \text{Pin}(2n)$ ou $\text{Spin}(2n + 1)$).

Exemple 4.7 Si on considère la paire symplectique avec $m = 3$, $n = 5$, et $\lambda = 4\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + \varepsilon_3$, on a $\tilde{\lambda} = 3\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + 2\varepsilon_3 + 1\varepsilon_4 + 0\varepsilon_5$.



La première figure est celle de $Y(\lambda)$, la seconde représente l'inclusion $Y(\lambda) \subset R(3, 5)$ et la troisième montre $Y(\tilde{\lambda})$.

Pour pouvoir montrer dans la section suivante que $\lambda \leftrightarrow \tilde{\lambda}$ est la correspondance voulue, on doit d'abord exhiber un vecteur de \mathbb{M} qui est $U_1 \times U_2$ -invariant de poids $(\lambda, \tilde{\lambda})$. A chaque poids dominant λ sous G_1 tel que $Y(\lambda) \subset R(m, n)$, on associe un vecteur $v_\lambda \in \mathbb{M}$ qui est $U_1 \times U_2$ -invariant de poids $(\lambda, \tilde{\lambda})$ et un vecteur $v_{\tilde{\lambda}} \in \mathbb{M}$ qui est $U_1^- \times U_2^-$ -invariant. Le vecteur v_λ est défini comme un produit extérieur de certains $x_i \otimes y_j \in N_1$, et $v_{\tilde{\lambda}}$ est le produit extérieur des $x_i \otimes y_j \in N_1$ ne figurant pas dans v_λ . En particulier on a $v_\lambda \wedge v_{\tilde{\lambda}} \neq 0$.

Supposons tout d'abord $\lambda_m \geq 0$. Dans l'inclusion $Y(\lambda) \subset R(m, n)$, on associe à la boîte b située sur la ligne $i \leq m$ et la colonne j l'élément $z_b = x_i \otimes y_{j-n-1}$ de N_1 , comme le montre l'exemple ci-dessous. On pose $v_\lambda = \bigwedge_{b \in Y(\lambda)} z_b \in \Lambda N_1$, et on vérifie

immédiatement que v_λ et $v_{\tilde{\lambda}}$ ont les propriétés requises.

Si $G_1 = \text{SO}(2m)$ et $\lambda_m < 0$, soit $\sigma_1 \in \text{O}(2m)$ défini de la même manière que $\sigma \in \text{O}(2n)$ au premier chapitre. Les vecteurs $v_\lambda = \sigma_1 v_{\tau(\lambda)}$ et $v_{\tilde{\lambda}} (= \sigma_1 v_{\tau(\tilde{\lambda})})$ ont les propriétés voulues. Seule leur U_1 -invariance (resp. U_1^- -invariance) n'est pas tout à fait évidente : il faut remarquer que U_1 et U_1^- sont stables par conjugaison par σ_1 , c'est-à-dire que σ_1 est quasi-semi-simple.

Enfin si $G_1 = \text{Spin}(2m)$ et $\lambda_m < 0$, on procède de même : on fait agir trivialement σ_1 sur la représentation spin de $\text{Spin}(2m)$, on obtient ainsi une action de σ_1 sur ΛN_1 et on pose $v_\lambda = \sigma_1 v_{\tau(\lambda)} \wedge (x_{-n} \otimes y_0)$.

Exemple 4.8 Soit $m = 3$, $n = 6$ et (G_1, G_2) la paire symplectique. On pose $\lambda = 4\varepsilon_1 + 3\varepsilon_2 + 2\varepsilon_3$. Le tableau qui suit montre l'inclusion $Y(\lambda) \subset R(2m, n)$.

	y_{-6}	y_{-5}	y_{-4}	y_{-3}	y_{-2}	y_{-1}
x_1						
x_2		b				
x_3						
x_{-3}						
x_{-2}						
x_{-1}						

On a

$$z_b = x_2 \otimes y_{-5} ,$$

$$\begin{aligned} v_\lambda &= x_1 \otimes y_{-6} \wedge x_1 \otimes y_{-5} \wedge x_1 \otimes y_{-4} \wedge x_1 \otimes y_{-3} \\ &\wedge x_2 \otimes y_{-6} \wedge x_2 \otimes y_{-5} \wedge x_2 \otimes y_{-4} \\ &\wedge x_3 \otimes y_{-6} \wedge x_3 \otimes y_{-5}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_\lambda^- &= x_1 \otimes y_{-2} \wedge x_1 \otimes y_{-1} \\ &\wedge x_2 \otimes y_{-3} \wedge x_2 \otimes y_{-2} \wedge x_2 \otimes y_{-1} \\ &\wedge x_3 \otimes y_{-4} \wedge x_3 \otimes y_{-3} \wedge x_3 \otimes y_{-2} \wedge x_3 \otimes y_{-1} \\ &\wedge x_{-3} \otimes y_{-6} \wedge x_{-3} \otimes y_{-5} \wedge x_{-3} \otimes y_{-4} \wedge x_{-3} \otimes y_{-3} \wedge x_{-3} \otimes y_{-2} \wedge x_{-3} \otimes y_{-1} \\ &\wedge x_{-2} \otimes y_{-6} \wedge x_{-2} \otimes y_{-5} \wedge x_{-2} \otimes y_{-4} \wedge x_{-2} \otimes y_{-3} \wedge x_{-2} \otimes y_{-2} \wedge x_{-2} \otimes y_{-1} \\ &\wedge x_{-1} \otimes y_{-6} \wedge x_{-1} \otimes y_{-5} \wedge x_{-1} \otimes y_{-4} \wedge x_{-1} \otimes y_{-3} \wedge x_{-1} \otimes y_{-2} \wedge x_{-1} \otimes y_{-1}. \end{aligned}$$

4.4 Echange des dimensions et des multiplicités

Soit M un G_2 -module basculant. On note i l'injection canonique de $H^0(U_2, M)$ dans M . On définit également $H_0(U_2^-, M) = M/I$, où I est le sous-espace engendré par les $gv - v$, avec $g \in U_2^-$ et $v \in M$, et on désigne par π la projection canonique de M sur $H_0(U_2^-, M)$. Soit $C = \text{End}_{G_2}(M)$ le commutant du G_2 -module M , et notons $S_\beta(M)$ le C -module $H^0(U_2, M)_\beta$ pour tout poids dominant β de G_2 . Si $G_2 = \text{O}(2n)$ ou $\text{O}(2n+1)$, rappelons que β peut désigner un couple (η, ε) avec $\eta \in P_2^+$ et $\varepsilon \in \{+, -\}$, et on parle de vecteurs de poids β au sens de la définition 1.14. Soit $T(M)$ l'image de $\pi \circ i : H^0(U_2, M) \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} H_0(U_2^-, M)$. C'est un C -module et un H_2 -module dont on note $T_\beta(M)$ le sous-espace de poids β . On note $[M : T_2(\beta)]$ la multiplicité, comme facteur direct, de $T_2(\beta)$ dans le module basculant M .

4.4. ECHANGE DES DIMENSIONS ET DES MULTIPLICITÉS

Remarquons que la démonstration des deux résultats suivants qu'on trouve dans [38], pour un groupe connexe, est également valable pour les groupes $O(2n)$, $O(2n+1)$ et $\text{Pin}(2n)$.

Lemme 4.9 ([38], lemme 7.3) *On a $[M : T_2(\beta)] = \dim T_\beta(M)$, en particulier $T_\beta(T(\gamma)) = \{0\}$ si $\beta \neq \gamma$ et $T_\beta(T(\beta)) = K_\beta$, où K_β est le H_2 -module de dimension 1 et de poids β .*

Proposition 4.10 ([38], lemme 11.1) *Soit β un poids dominant de G_2 tel que $T_\beta(M) \neq \{0\}$.*

1. *Le C -module $T_\beta(M)$ est simple, de dimension $[M : T_2(\beta)]$.*
2. *Soit $Z_\beta(M)$ le noyau du morphisme surjectif de C -modules $S_\beta(M) \rightarrow T_\beta(M)$ induit par $\pi \circ i$. On a $Z_\beta(M) = \text{Rad}(C)S_\beta(M)$, où $\text{Rad}(C)$ est le radical de C .*
3. *En particulier, tout $v \in S_\beta(M) \setminus Z_\beta(M)$ engendre $S_\beta(M)$ et $T_\beta(M)$ est l'unique quotient simple de $S_\beta(M)$.*

On constate une similitude entre les propriétés de $S_\beta(M)$ et celles des modules de Weyl, ce que la proposition suivante précise. Notons auparavant qu'en caractéristique nulle, $S_\beta(M)$ et $T_\beta(M)$ sont isomorphes puisque $\text{Rad}(C) = \{0\}$, et la projection π est donc superflue. En caractéristique p , appliquer π à $i(T(\lambda))$ permet d'éliminer tous les vecteurs U_2 -invariants de poids $< \lambda$. On applique maintenant les résultats qui précèdent à $M = \mathbb{M}$.

Proposition 4.11 *Soit $\lambda \in P_1^+$ tel que $\lambda_1 \leq n + \frac{1}{2}$. On a*

1. $T_{\tilde{\lambda}}(\mathbb{M}) = L_1(\lambda)$.
2. $S_{\tilde{\lambda}}(\mathbb{M}) = \Delta_1(\lambda)$.
3. $\dim L_1(\lambda)_\mu = [\mathbb{M}_\mu : T_2(\tilde{\lambda})]$ pour tout $\mu \in P_1$.

Démonstration. Remarquons tout d'abord que \mathbb{M}_μ est facteur direct, comme G_2 -module, du G_2 -module basculant \mathbb{M} , et ainsi \mathbb{M}_μ est lui-même basculant, ce qui justifie la notation $[\mathbb{M}_\mu : T_2(\tilde{\lambda})]$.

1. Supposons $G_2 = \text{Sp}(2n)$, $O(2n)$ ou $O(2n+1)$. On pose $d = \dim V_{1-} \otimes V_2$ et on considère l'application $\Gamma : \Lambda N_2 \rightarrow \Lambda^d N_2$ définie par $\Gamma(w) = \Pi(w \wedge \varphi(v_{\tilde{\lambda}}^-))$, Π étant la projection naturelle de ΛN_2 sur $\Lambda^d N_2$ et φ étant l'isomorphisme entre les modules de Clifford ΛN_1 et ΛN_2 . L'application Π est U_2^- -équivariante, U_2^- agit trivialement sur $\text{Im}(\Gamma)$ car $\Lambda^d N_2$ est de dimension 1 et $\varphi(v_{\tilde{\lambda}}^-)$ est U_2^- -invariant, ce qui montre que Γ se factorise à travers $H_0(U_2^-, \mathbb{M})$ en une application $\bar{\Gamma}$. Comme $\bar{\Gamma}(\pi(\varphi(v_\lambda))) = \Gamma(\varphi(v_\lambda)) = \varphi(v_\lambda) \wedge \varphi(v_{\tilde{\lambda}}^-)$ est non nul, on en déduit que $\pi \circ i(\varphi(v_\lambda)) \in T_{\tilde{\lambda}}(\mathbb{M})$ est non nul. Ce vecteur étant U_1 -invariant de poids λ , la proposition 4.10 donne le résultat annoncé.

Si $G_2 = \text{Pin}(2n)$ ou $\text{Spin}(2n + 1)$, on prend $d = \dim V_{1-} \otimes V_2$, $\Gamma : \Lambda N_2 \rightarrow \Lambda^d(V_{1-} \otimes V_2) \otimes \Lambda V_{2-}$ et Π est la projection naturelle de ΛN_2 sur $\Lambda^d(V_{1-} \otimes V_2) \otimes \Lambda V_{2-}$. Le reste de l'argument est identique, en particulier on voit que U_2^- agit trivialement sur $\text{Im}(\Gamma)$ car $y_{-1} \wedge \cdots \wedge y_{-n} \in \Lambda V_{2-}$ est de poids $-\omega_+$, et donc U_2^- -invariant.

2. Supposons $G_2 = \text{Sp}(2n)$, $\text{Spin}(2n + 1)$, $\text{O}(2n + 1)$, $\text{Pin}(2n)$, ou ($G_2 = \text{O}(2n)$ et $\lambda_n = 0$). En caractéristique zéro, on a $S_{\tilde{\lambda}}(\mathbb{M}) = \Delta_1(\lambda)$: il suffit de reprendre la démonstration du point précédent, valable en toute caractéristique. Le caractère de \mathbb{M} ne dépend pas de la caractéristique, et comme le G_2^0 -module \mathbb{M} est muni d'une bonne filtration, on en déduit que $\dim S_{\tilde{\lambda}}(\mathbb{M})$ n'en dépend pas non plus d'après 3.13. Comme la dimension de $\Delta_1(\lambda)$ ne dépend également pas de la caractéristique, on a $\dim S_{\tilde{\lambda}}(\mathbb{M}) = \dim \Delta_1(\lambda)$ en toute caractéristique. De plus on a vu que $\varphi(v_\lambda) \notin Z_{\tilde{\lambda}}(\mathbb{M})$, on déduit donc de 4.10 que $S_{\tilde{\lambda}}(\mathbb{M})$ est engendré par un vecteur U_1 -invariant de poids λ sous G_1 , et la propriété universelle de $\Delta_1(\lambda)$ permet de conclure.

Si $G_2 = \text{O}(2n)$ et $\tilde{\lambda} = (\eta, s)$ avec $\eta \in P^+$, $\eta_n = 0$ et $s \in \{+, -\}$, on montre comme ci-dessus que $\dim S_{(\eta,+)}(\mathbb{M}) + \dim S_{(\eta,-)}(\mathbb{M})$, c'est-à-dire la dimension de l'espace des vecteurs U_2 -invariants de poids η sous G_2^0 , vaut $\dim \Delta_1(\lambda) + \dim \Delta_1(\tau(\lambda))$ en toute caractéristique. On sait aussi que si $t = s$ (resp. $t = -s$), $S_{(\eta,t)}(\mathbb{M})$ est engendré par un vecteur U_1 -invariant de poids λ (resp. $\tau(\lambda)$) sous G_1 , la propriété universelle des modules de Weyl implique alors que $S_{(\eta,t)}(\mathbb{M})$ est un quotient de $\Delta_1(\lambda)$ (resp. $\Delta_1(\tau(\lambda))$), et on conclut comme auparavant.

3. On a $(T_{\tilde{\lambda}}(\mathbb{M}))_\mu = T_{\tilde{\lambda}}(\mathbb{M}_\mu)$ pour tout poids μ de G_1 . En effet on a clairement $T_{\tilde{\lambda}}(\mathbb{M}_\mu) \subset (T_{\tilde{\lambda}}(\mathbb{M}))_\mu$, et $T_{\tilde{\lambda}}(\mathbb{M}) = T_{\tilde{\lambda}}(\oplus \mathbb{M}_\mu) = \sum T_{\tilde{\lambda}}(\mathbb{M}_\mu) = \oplus (T_{\tilde{\lambda}}(\mathbb{M}))_\mu$, d'où l'égalité. Le lemme 4.9 donne alors $\dim L_1(\lambda)_\mu = \dim (T_{\tilde{\lambda}}(\mathbb{M}))_\mu = \dim T_{\tilde{\lambda}}(\mathbb{M}_\mu) = [\mathbb{M}_\mu : T_2(\tilde{\lambda})]$.

□

Il ne reste plus qu'à expliciter le G_2 -module \mathbb{M}_μ . Remarquons que V_{1-} et Kx_0 sont des H_1 -modules, si bien que N_2 , puis ΛN_2 héritent d'une nouvelle structure de H_1 -module, qu'on désigne comme étant la *seconde action de H_1 sur ΛN_2* . On parle simplement de l'action de H_1 sur ΛN_2 quand on veut parler de l'action naturelle de H_1 sur ΛN_1 , transportée via $\varphi : \Lambda N_1 \rightarrow \Lambda N_2$.

Proposition 4.12 *Soit $v \in \Lambda N_2$ de poids ν sous la seconde action de H_1 . Le poids de v sous l'action de H_1 est $\nu + n \sum_{i=1}^m \varepsilon_i$ si $G_1 = \text{Sp}(2m)$, $\text{SO}(2m)$ ou $\text{SO}(2m + 1)$, et $\nu + (n + \frac{1}{2}) \sum_{i=1}^m \varepsilon_i$ si $G_1 = \text{Spin}(2m + 1)$ ou $\text{Spin}(2m)$.*

Démonstration. Il suffit de démontrer cette formule pour les v qui sont des produits extérieurs des $x_i \otimes y_j$. Elle résulte immédiatement de la proposition 4.5 liant v et $\varphi^{-1}(v) \in \Lambda N_1$: supposons tout d'abord $G_1 \neq \text{Spin}(V_1)$. Pour tout $E \subset$

4.4. ECHANGE DES DIMENSIONS ET DES MULTIPLICITÉS

$\{-m, \dots, m\} \times \{0, \dots, -n\}$, on définit le poids $\mu(E)$ de E (relativement à H_1) par $\mu(E) = \sum_{i=1}^m (E_{i,+} - E_{i,-})\varepsilon_i$ où $E_{i,+}$ (resp. $E_{i,-}$) est le cardinal de $\{j \mid (x_i, y_j) \in E\}$ (resp. $\{j \mid (x_{-i}, y_j) \in E\}$). En reprenant les notations de 4.5, on voit que le poids de $w = \varphi^{-1}(v)$ sous H_1 est $\mu(\Omega_1) + \mu(\Omega_2)$, et le poids de $v = \varphi(w)$ sous la seconde action de H_1 est $\mu(\Omega_1) + \mu(\Omega \setminus -\Omega_2) = \mu(\Omega_1) + \mu(\Omega) + \mu(\Omega_2) = \mu(\Omega_1) + \mu(\Omega_2) - n \sum_{i=1}^m \varepsilon_i$.

Si $G_1 = \text{Spin}(2m+1)$ ou $\text{Spin}(2m)$, il faut prendre en compte la représentation spin. Avec les notations de 4.5, on peut écrire Ω_1 comme la réunion de deux ensembles disjoints Ω_0 et $\overline{\Omega_1}$ tels que $\Omega_0 \subset \{-1, \dots, -m\} \times \{0\}$ et $\overline{\Omega_1} \subset \{0, \dots, -m\} \times \{-1, \dots, -n\}$. Alors le poids de w est

$$\mu(\overline{\Omega_1}) + \mu(\Omega_2) + \frac{1}{2} \left(\sum_{j \notin -\Omega_0} \varepsilon_j - \sum_{j \in -\Omega_0} \varepsilon_j \right),$$

et le poids de v sous la seconde action est

$$\begin{aligned} & \mu(\Omega_0) + \mu(\overline{\Omega_1}) + \mu(\Omega_2) - n \sum_{i=1}^m \varepsilon_i \\ &= \mu(\overline{\Omega_1}) + \mu(\Omega_2) + \frac{1}{2} \left(\sum_{j \notin -\Omega_0} \varepsilon_j - \sum_{j \in -\Omega_0} \varepsilon_j \right) + \left(\mu(\Omega_0) - n \sum_{i=1}^m \varepsilon_i - \frac{1}{2} \left(\sum_{j \notin -\Omega_0} \varepsilon_j - \sum_{j \in -\Omega_0} \varepsilon_j \right) \right) \\ &= \text{poids de } w - \sum_{j \in -\Omega_0} \varepsilon_j - n \sum_{i=1}^m \varepsilon_i - \frac{1}{2} \sum_{j \notin -\Omega_0} \varepsilon_j + \frac{1}{2} \sum_{j \in -\Omega_0} \varepsilon_j = \text{poids de } w - \left(n + \frac{1}{2}\right) \sum_{i=1}^m \varepsilon_i. \end{aligned}$$

□

Définition 4.13 Pour tout $\mu = \sum_{i=1}^m \mu_i \varepsilon_i \in P_1$ entier (resp. demi-entier), on pose

$$\Lambda^\mu V_2 = \bigotimes_{i=1}^m \Lambda^{n-\mu_i} V_2 \quad (\text{resp. } \Lambda^\mu V_2 = \bigotimes_{i=1}^m \Lambda^{n+\frac{1}{2}-\mu_i} V_2).$$

Corollaire 4.14 Pour tout $\mu \in P_1$ (demi-entier si $G_1 = \text{Spin}(2m+1)$ ou $\text{Spin}(2m)$) on a les égalités entre G_2 -modules :

1. Si $G_1 = \text{Sp}(2m), \text{SO}(2m)$ ou $\text{Spin}(2m)$, $\mathbb{M}_\mu \simeq \Lambda^\mu V_2$.
2. Si $G_1 = \text{SO}(2m+1)$ ou $\text{Spin}(2m+1)$, $\mathbb{M}_\mu \simeq \Lambda^\mu V_2 \otimes \Lambda V_{2-}$.

Démonstration. D'après la proposition précédente, \mathbb{M}_μ est l'ensemble des vecteurs de ΛN_2 de poids $\nu = \sum_{i=1}^m \nu_i \varepsilon_i = \mu - n \sum_{i=1}^m \varepsilon_i$ (resp. $\nu = \mu - (n + \frac{1}{2}) \sum_{i=1}^m \varepsilon_i$) sous la seconde action de H_1 si $G_1 \neq \text{Spin}(2m+1), \text{Spin}(2m)$ (resp. $G_1 = \text{Spin}(2m+1)$ ou $\text{Spin}(2m)$).

1. Si $G_1 = \text{Sp}(2m), \text{SO}(2m)$ ou $\text{Spin}(2m)$, une base de \mathbb{M}_μ est la famille des $\bigwedge_{i \geq 1} \bigwedge_{j \in J_i} x_{-i} \otimes y_j \in \Lambda N_2$ avec $\text{card} J_i = -\nu_i = n - \mu_i$ pour tout i si $G_1 = \text{Sp}(2m)$ ou $\text{SO}(2m)$, et $\text{card} J_i = -\nu_i = n + \frac{1}{2} - \mu_i$ pour tout i si $G_1 = \text{Spin}(2m)$. On en déduit un isomorphisme de G_2 -modules $\psi : \Lambda^\mu V_2 \rightarrow \mathbb{M}_\mu$ qui envoie $\bigotimes_i (\bigwedge_{j \in J_i} y_j)$ sur $\bigotimes_i (\bigwedge_{j \in J_i} x_{-i} \otimes y_j)$.
2. Si $G_1 = \text{SO}(2m+1)$ ou $\text{Spin}(2m+1)$, une base de \mathbb{M}_μ est la famille des $\bigwedge_{i \geq 0} \bigwedge_{j \in J_i} x_{-i} \otimes y_j \in \Lambda N_2$ avec $J_0 \subset \{-1, \dots, -n\}$, et pour tout $i \neq 0$: $\text{card} J_i =$

CHAPITRE 4. PAIRES DUALES

$-\nu_i = n - \mu_i$ si $G_1 = \mathrm{SO}(2m+1)$ et $\mathrm{card}J_i = -\nu_i = n + \frac{1}{2} - \mu_i$ si $G_1 = \mathrm{Spin}(2m+1)$. On en déduit un isomorphisme de G_2 -modules $\psi : \Lambda^\mu V_2 \otimes \Lambda V_{2-} \rightarrow \mathbb{M}_\mu$ qui envoie $(\bigotimes_{i \neq 0} (\bigwedge_{j \in J_i} y_j)) \otimes (\bigwedge_{j \in J_0} y_j)$ sur $\bigotimes_i (\bigwedge_{j \in J_i} x_{-i} \otimes y_j)$. \square

Corollaire 4.15 Soient $\lambda \in P_1^+$ tel que $\lambda_1 \leq n + \frac{1}{2}$ et $\mu \in P_1$.

Si $G_1 = \mathrm{Sp}(2m)$, $\mathrm{SO}(2m)$ ou $\mathrm{Spin}(2m)$, on a $\dim L_1(\lambda)_\mu = [\Lambda^\mu V_2 : T_2(\tilde{\lambda})]$.

Si $G_1 = \mathrm{SO}(2m+1)$ ou $\mathrm{Spin}(2m+1)$, on a $\dim L_1(\lambda)_\mu = [\Lambda^\mu V_2 \otimes \Lambda V_{2-} : T_2(\tilde{\lambda})]$.

Dans tous les cas, les poids $\mu = \sum_{i=1}^m \mu_i \varepsilon_i$ de $L_1(\lambda)$ vérifient $|\mu_i| \leq n + \frac{1}{2}$ pour tout i .

Chapitre 5

Caractères en caractéristique zéro

On se propose dans ce chapitre de retrouver les formules combinatoires donnant les caractères des groupes classiques en caractéristique zéro. Cela nous permet d'introduire des définitions qui serviront dans le chapitre suivant, et de séparer les difficultés liées à la caractéristique et celles liées à la combinatoire.

Même dans ce cadre, le recours aux paires duales est intéressant : classiquement, les démonstrations des formules qui expriment les valeurs des caractères des groupes classiques en termes de diagrammes de Young se réduisent à des manipulations combinatoires faisant intervenir des bidéterminants (reformulations de la formule des caractères de Weyl) et des identités entre polynômes symétriques. Les paires duales permettent de minimiser la partie combinatoire et lui donnent davantage de sens, en montrant qu'elle traduit la décomposition de certains produits tensoriels de représentations du groupe auxiliaire.

Pour déterminer le caractère d'une représentation $L(\lambda)$, nous procédons comme suit. On traite d'abord le groupe symplectique, dont la combinatoire est la plus simple. On réunit les résultats des chapitres précédents, ce qui permet d'exprimer le caractère de la représentation $L(\lambda)$ de $\mathrm{Sp}(2m)$ en termes de suites de pseudo- $\mathrm{GL}(2)$ -tableaux gauches, suites qu'on concatène en pseudo- $\mathrm{Sp}(2m)$ -tableaux, eux-mêmes transformés en $\mathrm{Sp}(2m)$ -tableaux de forme $Y(\lambda)$. On applique ensuite le même schéma aux autres groupes.

On conclut ce chapitre par une démonstration du théorème 1.18, qui donne les caractères de $\mathrm{O}(2n)$ sur la seconde composante connexe de ce groupe. On utilise pour cela la paire duale $(\mathrm{SO}(2m), \mathrm{O}(2n))$, mais les rôles sont inversés par rapport à ceux du chapitre précédent : on veut calculer les caractères irréductibles de $\mathrm{O}(2n)$, et c'est $\mathrm{SO}(2m)$ qui est le groupe auxiliaire.

5.1 Synthèse des chapitres 2 et 4

Montrons comment les chapitres précédents nous permettent de trouver des formules de caractères. Soit $G = G_1 = \mathrm{Sp}(2m)$ et soient $\lambda \in P_1^+$ et $\mu \in P_1$. Grâce aux paires duales, on sait que si on fixe un entier $n \geq \lambda_1$, une $(\mathrm{Sp}(2m), \mathrm{Sp}(2n))$ paire

CHAPITRE 5. CARACTÈRES EN CARACTÉRISTIQUE ZÉRO

duale nous donne la formule $\dim L_1(\lambda)_\mu = [\Lambda^\mu V_2 : L_2(\tilde{\lambda})]$. Il nous faut donc itérer des produits tensoriels de puissances extérieures de V_2 et traduire les multiplicités sous forme combinatoire à l'aide des résultats du chapitre 2. Rappelons tout d'abord quelques définitions classiques.

Définition 5.1 *Soit Y un diagramme de Young. Un tableau T de forme Y est un remplissage des boîtes de Y par des entiers strictement positifs. Pour tout i on note T_i le nombre de boîtes de T ayant le numéro i . Si la numérotation de T est croissante au sens large dans chaque ligne (parcourue de gauche à droite) et chaque colonne (parcourue de haut en bas), pour tout i on note $T[i]$ le diagramme de Young constituée des boîtes de numéro $\leq i$. On dit que T est semi-standard si la numérotation est croissante au sens large dans chaque ligne et strictement croissante dans chaque colonne.*

On obtient immédiatement que la multiplicité de $L(\tilde{\lambda})$ dans $\Lambda^\mu V_2$ est le nombre de suites de pseudo-GL(2)-tableaux gauches sur des diagrammes gauches $\gamma^0 \rightarrow \gamma^1, \gamma^1 \rightarrow \gamma^2, \dots, \gamma^{m-1} \rightarrow \gamma^m$ avec $\gamma^0 = 0, \gamma^m = \tilde{\lambda}$ et pour tout i , les tableaux gauches sur $\gamma^{i-1} \rightarrow \gamma^i$ sont de poids μ_i . Considérons une telle suite, et pour tout i remplaçons 1 par $2i - 1$ et 2 par $2i$ dans le tableau gauche sur $\gamma^{i-1} \rightarrow \gamma^i$. En imbriquant ces tableaux gauches les uns à la suite des autres, on obtient un tableau T sur un certain diagramme de Young. Indiquons brièvement comment retrouver les poids γ^i et les diagrammes gauches $\gamma^{i-1} \rightarrow \gamma^i$ à partir du tableau T . Par construction on sait déjà que $\gamma^{i-1} \rightarrow \gamma^i = T[2i] \setminus T[2i - 2]$ pour tout i , et une récurrence immédiate sur i montre que $R(n, i) \subset T[2i]$ et $Y(\gamma^i) = T[2i] \setminus R(n, i)$ pour tout i .

On a en particulier $Y(\tilde{\lambda}) = T[2m] \setminus R(n, m)$. Ceci nous amène à introduire les définitions suivantes, notamment celle de pseudo-Sp(2m)-tableau.

Définition 5.2 *Un GL(m)-tableau T est un tableau semi-standard dont les numéros sont compris entre 1 et m .*

Définition 5.3 *Un pseudo-GL(m)-tableau est le transposé d'un GL(m)-tableau (autrement dit les numéros sont compris entre 1 et m et la numérotation est strictement croissante dans chaque ligne et croissante au sens large dans chaque colonne).*

Définition 5.4 *Soit Y un diagramme de Young. Un Sp(2m)-tableau T de forme Y est un GL(2m)-tableau de forme Y où, si $t_1 < t_2 < \dots$ sont les numéros des boîtes situées sur la première colonne de Y , on a $t_i \geq 2i - 1$ pour tout i .*

Le poids de T est $\sum_{i=1}^m (T_{2i-1} - T_{2i})\varepsilon_i$.

Fixons $n \geq 1$, et rappelons que $R(n, j)$ désigne le diagramme rectangulaire à n lignes et j colonnes.

5.2. UNE CORRESPONDANCE ENTRE TABLEAUX

Définition 5.5 *Supposons $R(n, m) \subset Y \subset R(n, 2m)$. Un pseudo- $\text{Sp}(2m)$ -tableau T de forme Y est un pseudo- $\text{GL}(2m)$ -tableau tel que pour tout $i \leq m$ on a $R(n, i) \subset T[2i]$.*

Le poids de T est $\sum_{i=1}^m (T_{2i} - T_{2i-1})\varepsilon_i$.

On notera que la définition du poids n'est pas la même pour les $\text{Sp}(2m)$ -tableaux et les pseudo- $\text{Sp}(2m)$ -tableaux, et on remarquera que la notion de pseudo- $\text{Sp}(2m)$ -tableau dépend de l'entier n fixé.

Le tableau T obtenu par juxtaposition de pseudo- $\text{GL}(2)$ -tableaux gauches est donc un pseudo- $\text{Sp}(2m)$ -tableau de forme $Y(\tilde{\lambda} + m\omega_n)$ (qui est le diagramme $Y(\tilde{\lambda})$ auquel on a ajouté un rectangle $R(n, m)$). Ainsi $\dim L(\lambda)_\mu$ est le nombre de pseudo- $\text{Sp}(2m)$ -tableaux de forme $Y(\tilde{\lambda} + m\omega_n)$ et de poids μ . On établit dans la section suivante une bijection naturelle entre les pseudo- $\text{Sp}(2m)$ -tableaux de forme $Y(\tilde{\lambda} + m\omega_n)$ et les $\text{Sp}(2m)$ -tableaux de forme $Y(\lambda)$. Cette bijection élimine la dépendance en n et permet d'exprimer $\dim L(\lambda)_\mu$ en termes de tableaux sur $Y(\lambda)$.

5.2 Une correspondance entre tableaux

Soit $G = \text{Sp}(2m)$, considérons un pseudo- $\text{Sp}(2m)$ -tableau de forme Y avec $R(n, m) \subset Y \subset R(n, 2m)$, et soit $\mathcal{C} = R(n, 2m) \setminus Y$. En appliquant à \mathcal{C} la symétrie par rapport à la seconde diagonale, on trouve un diagramme $\phi(Y) \subset R(m, n)$. A tout pseudo- $\text{Sp}(2m)$ -tableau T de forme Y , on associe un tableau $\phi(T)$ de forme $\phi(Y)$ de la manière suivante (voir l'exemple ci-dessous). Comme $Y \subset R(n, 2m)$, le tableau T est une numérotation partielle de $R(n, 2m)$, et sur chaque ligne de $R(n, 2m)$, tout numéro figure au plus une fois. On complète cette numérotation de telle sorte que sur chaque ligne de $R(n, 2m)$, on trouve tous les entiers entre 1 et $2m$, les numéros rajoutés décroissant strictement de la gauche vers la droite. On obtient ainsi une numérotation des boîtes de $\phi(Y)$, la numérotation étant strictement croissante dans chaque colonne.

Exemple 5.6 Si $m = 3$ et $n = 5$, la première figure est un pseudo- $\text{Sp}(6)$ -tableau T de forme $Y = (6, 5, 5, 4, 4)$, la seconde figure indique la numérotation de $R(5, 6)$ et la troisième est le tableau $\phi(T)$ de forme $\phi(Y) = (4, 2)$.

	1	2	3	4	5	6
	1	2	4	5	6	
T	1	3	4	5	6	
	2	3	4	5		
	2	4	5	6		

1	2	3	4	5	6
1	2	4	5	6	3
1	3	4	5	6	2
2	3	4	5	6	1
2	4	5	6	3	1

$\phi(T)$	1	1	2	3
	3	6		

Sur la ligne 4 par exemple, il manquait les numéros 6 et 1, on a donc complété 2 3 4 5 en 2 3 4 5 6 1.

On dispose de même d'une application ψ qui associe un tableau $\psi(T)$ de forme Y à tout $\mathrm{Sp}(2m)$ -tableau T de forme $\phi(Y)$, la numérotation de $\psi(T)$ étant strictement croissante dans chaque ligne. On veut prouver la proposition suivante.

Proposition 5.7 *L'application ϕ est une bijection entre les pseudo- $\mathrm{Sp}(2m)$ -tableaux de forme Y et les $\mathrm{Sp}(2m)$ -tableaux de forme $\phi(Y)$, son inverse étant ψ . En outre ϕ et ψ préservent le poids.*

Lemme 5.8 *Si T est un pseudo- $\mathrm{Sp}(2m)$ -tableau de forme Y , alors $\phi(T)$ est un $\mathrm{Sp}(2m)$ -tableau de forme $\phi(Y)$.*

Démonstration. Établissons tout d'abord que $\phi(T)$ est un tableau semi-standard. Il suffit d'établir la croissance au sens large de la numérotation dans chaque ligne, et on peut se réduire au cas $n = 2$, c'est-à-dire au cas où $\phi(Y)$ a au plus deux colonnes. Observons qu'un tableau U sur un diagramme de Young est une numérotation croissante au sens large sur chaque ligne et sur chaque colonne si et seulement si $U[j]$ est un diagramme de Young pour tout j . On doit donc montrer que $\phi(T)[j]$ est un diagramme de Young pour tout j . La numérotation étant strictement croissante dans chaque colonne de $\phi(T)$, il suffit d'établir que la première colonne de $\phi(T)[j]$ a au moins autant de boîtes que la seconde. Pour tout diagramme de Young V , notons $L_1(V)$ (resp. $L_2(V)$, $C_1(V)$, $C_2(V)$) le nombre de boîtes dans la première ligne de V (resp. seconde ligne, première colonne, seconde colonne). On a $C_1(\phi(T)[j]) + L_2(T[j]) = j = C_2(\phi(T)[j]) + L_1(T[j])$, d'où $C_1(\phi(T)[j]) - C_2(\phi(T)[j]) = L_1(T[j]) - L_2(T[j]) \geq 0$. Ainsi $\phi(T)$ est un tableau semi-standard.

Pour tout j , soit q_j (resp. q'_j) le nombre de numéros $\leq 2j$ sur la première colonne de $\phi(T)$ (resp. la ligne n de T). Il résulte des définitions que $q'_j \geq j$, et on a $q'_j + q_j = 2j$, d'où $q_j \leq j$ et $t_{j+1} > 2j$. Ainsi $\phi(T)$ est un $\mathrm{Sp}(2m)$ -tableau de forme $\phi(Y)$. \square

Démonstration de la proposition. Le lemme 5.8 montre que ϕ est à valeurs dans l'ensemble des $\mathrm{Sp}(2m)$ -tableaux de forme $\phi(Y)$, et un lemme analogue montrerait que ψ est à valeurs dans l'ensemble des pseudo- $\mathrm{Sp}(2m)$ -tableaux de forme Y . Les applications ϕ et ψ sont alors clairement inverses l'une de l'autre. Enfin si T est un pseudo- $\mathrm{Sp}(2m)$ -tableau de forme Y , on voit que $T_j + \phi(T)_j = n$ pour tout j , et donc $T_{2i} - T_{2i-1} = \phi(T)_{2i-1} - \phi(T)_{2i}$ pour tout i , ce qui prouve que ϕ préserve le poids. \square

Via cette correspondance, dire qu'on a exactement (resp. au plus, au moins) l boîtes de numéro $\leq j$ sur la ligne k de T équivaut à dire qu'on a exactement (resp. au moins, au plus) $j - l$ boîtes de numéro $\leq j$ sur la colonne $n + 1 - k$ de $\phi(T)$.

5.3 G -poids des G -tableaux

On définit dans cette section les G -tableaux, G étant un des nos cinq groupes classiques connexes, et leur G -poids. Soit Y un diagramme de Young et T un $\mathrm{GL}(2m)$ -tableau de forme Y . On note $t_{u,v}$ le numéro de la boîte à l'intersection de la ligne u

5.3. G -POIDS DES G -TABLEAUX

et de la colonne v . On note également $t_1 < t_2 < \dots$ les numéros des boîtes situées sur la première colonne de T . On rappelle pour commencer la définition 5.4 d'un $\mathrm{Sp}(2m)$ -tableau.

Définition On dit que T est un $\mathrm{Sp}(2m)$ -tableau de forme Y et de poids μ si on a $t_i \geq 2i - 1$ pour tout i et $\sum_{i=1}^m (T_{2i-1} - T_{2i})\varepsilon_i = \mu$.

Définition 5.9 On dit que T est un $\mathrm{Spin}(2m + 1)$ -tableau de forme Y et de poids μ si on a $t_i \geq 2i - 1$ pour tout i et si $\sum_{i=1}^m (T_{2i-1} - T_{2i})\varepsilon_i = \mu + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \pm \varepsilon_i$.

On remarque qu'un $\mathrm{Spin}(2m + 1)$ -tableau T de forme Y n'a pas un poids déterminé, il y a en fait exactement 2^m poids μ tels que T soit de poids μ . Dans la section suivante, on montre que la dimension de $L(\lambda)$ est le nombre de G -tableaux de forme $Y(\lambda)$. Si $G = \mathrm{Spin}(2m + 1)$, la dimension de $L(\lambda)$ est donc le nombre de $\mathrm{Sp}(2m)$ -tableaux de forme $Y(\lambda)$ multiplié par 2^m , autrement dit $\dim L(\lambda) = 2^m \dim L'(\lambda)$, $L'(\lambda)$ étant la représentation de $\mathrm{Sp}(2m)$ de plus haut poids λ . Cette formule peut aussi se déduire facilement de la formule des dimensions de Weyl.

Définition 5.10 On dit que T est un $\mathrm{Spin}(2m)$ -tableau de forme Y et de poids μ si on a $t_i \geq 2i - 1$ pour tout i , $\sum_{i=1}^m (T_{2i-1} - T_{2i})\varepsilon_i = \mu + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \pm \varepsilon_i$, ainsi que les conditions suivantes :

1. Si $T_{2i-1} - T_{2i} = \mu_i - \frac{1}{2}$, alors pour tout j , $t_{i,j} = 2i$ implique $t_{i-1,j} = 2i - 1$.
2. Si $T_{2i-1} - T_{2i} = \mu_i + \frac{1}{2}$, alors $t_i \neq 2i - 1$.

Définition 5.11 On dit que T est un $\mathrm{SO}(2m + 1)$ -tableau de forme Y et de poids μ si on a $t_i \geq 2i - 1$ pour tout i , $\sum_{i=1}^m (T_{2i-1} - T_{2i})\varepsilon_i = \mu$ ainsi que la condition suivante : si i est tel que $t_i = 2i - 1$, on peut placer un $\#$ à droite de t_i , dans la même boîte. Les $2i - 1$ accompagnés d'un $\#$ ne sont pas comptabilisés dans le calcul de T_{2i-1} .

Définition 5.12 On dit que T est un $\mathrm{SO}(2m)$ -tableau de forme Y et de poids μ si on a $t_i \geq 2i - 1$ pour tout i , $\sum_{i=1}^m (T_{2i-1} - T_{2i})\varepsilon_i = \mu$ ainsi que les conditions suivantes :

1. Si $t_i \leq 2i$, on doit placer un signe $s_i \in \{+, -\}$ à droite de t_i , dans la même boîte. On convient de poser $t_0 = 0$ et $s_0 = +$.
2. Si on a $t_{i-1} \leq 2i - 2$ et $t_i = 2i$ pour un $i \geq 1$, on a $s_i = -s_{i-1}$.
3. si on a $t_{i-1} \leq 2i - 2$ et $t_i = 2i - 1$ pour un $i \geq 1$, on a $s_i = s_{i-1}$ et pour tout j , $t_{i,j} = 2i$ implique $t_{i-1,j} = 2i - 1$.

5.4 Caractères en caractéristique zéro

Soit G un de nos groupes classiques connexes. Si $G = \mathrm{SO}(2m)$ et $\lambda_m \neq 0$, on convient que dans tout G -tableau de forme $Y(\lambda)$, on a $s_m = +$ si $\lambda_m > 0$ et $s_m = -$ si $\lambda_m < 0$. Avec cette convention, on a si $G = \mathrm{Sp}(2m)$, $\mathrm{SO}(2m+1)$, $\mathrm{SO}(2m)$, $\mathrm{Spin}(2m+1)$ ou $\mathrm{Spin}(2m)$:

Théorème 5.13 *Pour tout $\lambda \in P^+$ et tout $\mu \in P$ tel que $\mu \leq \lambda$, la dimension de $L(\lambda)_\mu$ est le nombre de G -tableaux de forme $Y(\lambda)$ et de poids μ .*

Démonstration. On fixe $n \geq \lambda_1 - \frac{1}{2}$ et on considère la (G_1, G_2) paire duale \mathbb{M} telle que $G_1 = G$. Soit T un $\mathrm{Sp}(2m)$ -tableau de forme $Y(\lambda)$, $\psi(T)$ étant la juxtaposition d'une suite de pseudo- $\mathrm{GL}(2)$ -tableaux gauches sur les diagrammes gauches $\gamma^0 \rightarrow \gamma^1, \gamma^1 \rightarrow \gamma^2, \dots, \gamma^{m-1} \rightarrow \gamma^m$. Pour chaque groupe G , il nous faut vérifier que les différentes conditions portant sur les pseudo- $\mathrm{GL}(2)$ -tableaux font de T un G -tableau de poids μ .

1. Si $G = \mathrm{Sp}(2m)$ le résultat découle immédiatement des discussions précédentes.
2. Si $G = \mathrm{Spin}(2m+1)$, seule la condition portant sur le poids demande une vérification. On a $\gamma^0 = \omega_+$, $\gamma^m = \tilde{\lambda}$, et le tableau gauche sur $\gamma^{i-1} \rightarrow \gamma^i$ est de poids $n - (n + \frac{1}{2} - \mu_i) = \mu_i - \frac{1}{2}$ ou $n - (n + \frac{1}{2} - \mu_i) + 1 = \mu_i + \frac{1}{2}$, d'où la formule voulue.
3. Si $G = \mathrm{SO}(2m+1)$, on a $\gamma^0 = \omega_+$, $\gamma^m = \tilde{\lambda}$. En vertu de 2.11, si on a un i tel que $\gamma_n^{i-1} = \gamma_n^i = \frac{1}{2}$, on peut avoir un $2i\#$ dans l'unique boîte située sur la ligne n de $\gamma^{i-1} \rightarrow \gamma^i$. Comme $Y(\gamma^i) = \psi(T)[2i] \setminus R(n, i)$, la condition $\gamma_n^i = \frac{1}{2}$ équivaut à dire qu'il y a exactement i boîtes de numéro $\leq 2i$ sur la ligne n de $\psi(T)$, ce qui équivaut aussi à dire qu'il y a exactement i boîtes de numéro $\leq 2i$ sur la première colonne de T , c'est-à-dire $t_i \leq 2i$ puisqu'on a $t_{i+1} \geq 2i+1$. Par conséquent si $t_{i-1} \leq 2i-2$ et $t_i \leq 2i$ on peut avoir un $2i\#$ sur la ligne n de $\psi(T)$, dans l'unique boîte dont le numéro est $2i-1$ ou $2i$. Sur la première colonne de T on a également une unique boîte dont le numéro est $2i-1$ ou $2i$, et ce numéro est $2i$ (resp. $2i-1$) si le numéro sur la ligne n de $\psi(T)$ est $2i-1$ (resp. $2i$). On dièse le $2i-1$ de T lorsque le $2i$ de $\psi(T)$ est diésé, et on vérifie que ce $(2i-1)\#$ ne doit pas être pris en compte dans le calcul du poids. Finalement, si $t_{i-1} \leq 2i-2$ et $t_i \leq 2i$ on peut avoir un $(2i-1)\#$ sur la première colonne de T , nécessairement sur la ligne i , ce qui équivaut à la condition de l'énoncé.
4. Si $G = \mathrm{SO}(2m)$, on considère en outre une suite s_0, \dots, s_m avec $s_i \in \{0, +, -\}$ pour tout i et $(\gamma^0, s_0) = (0, +)$, $(\gamma^m, s_m) = \tilde{\lambda}$ si $\lambda_m \neq 0$, $(\gamma^m, s_m) = (\tilde{\lambda}, 0)$ sinon. La multiplicité de $L(\gamma^i, s_i)$ dans $\Lambda^l V_2 \otimes L(\gamma^{i-1}, s_{i-1})$ est donnée par la proposition 2.11, et on en déduit des conditions sur T . Si $\gamma_n^{i-1} = \gamma_n^i = 0$ et $s_{i-1} = s_i$, il n'existe pas de j tel que $(\gamma_j^{i-1} = 0$ et $\psi(T)$ a un $2i-1$ et pas de $2i$ sur la ligne j). La condition $\gamma_n^i = 0$ équivaut à $t_i \leq 2i$, et sous cette hypothèse on met le signe s_i à droite de t_i dans la même boîte. On a $s_{i-1} = s_i$

5.4. CARACTÈRES EN CARACTÉRISTIQUE ZÉRO

si et seulement s'il n'existe pas de j tel que (on a exactement $i - 1$ boîtes de numéro $\leq 2i - 2$ sur la ligne j de $\psi(T)$ et $\psi(T)$ a un $2i - 1$ et pas de $2i$ sur la ligne j), c'est-à-dire qu'il n'existe pas de j tel que ($t_{i-1,j} \leq 2i - 2$ et T a un $2i$ et pas de $2i - 1$ sur la colonne j). Comme $t_{i+1,j} \geq t_{i+1} \geq 2i + 1$, la condition se réécrit : il n'existe pas de j tel que ($t_{i-1,j} \leq 2i - 2$ et $t_{i,j} = 2i$). Si $\gamma_n^{i-1} = \gamma_n^i = 0$, on a $s_{i-1} = -s_i$ si et seulement si $\psi(T)$ a un $2i - 1$ et pas de $2i$ sur la ligne n , ce qui signifie que T a un $2i$ et pas de $2i - 1$ sur la première colonne, autrement dit $t_i = 2i$. Résumons les conditions obtenues sous l'hypothèse $t_{i-1} \leq 2i - 2$ et $t_i \leq 2i$:

- (a) $s_{i-1} = s_i$ si et seulement s'il n'existe pas de j tel que ($t_{i-1,j} \leq 2i - 2$ et $t_{i,j} = 2i$).
- (b) $s_{i-1} = -s_i$ si et seulement si $t_i = 2i$.

Ces conditions sont clairement équivalentes à celles de l'énoncé.

5. Si $G = \text{Spin}(2m)$, on considère encore une suite s_0, \dots, s_m avec $s_i \in \{+, -\}$ pour tout i et $(\gamma^0, s_0) = (0, +)$, $(\gamma^m, s_m) = \tilde{\lambda}$. Pour tout i , le tableau gauche sur $\gamma^{i-1} \rightarrow \gamma^i$ est de poids $\mu_i \pm \frac{1}{2}$ et il vérifie la condition suivante : s'il est de poids $\mu_i - \frac{1}{2}$, il n'existe pas de i tel que ($\gamma_j^{i-1} = 0$ et $\psi(T)$ a un $2i - 1$ et pas de $2i$ sur la ligne j), et s'il est de poids $\mu_i + \frac{1}{2}$ et $\gamma_n^{i-1} = 0$, le numéro $2i - 1$ figure sur la ligne n . La première possibilité a déjà été traitée dans le cas $G = \text{SO}(2m)$, on peut donc supposer que le poids est $\mu_i + \frac{1}{2}$ et $\gamma_n^{i-1} = 0$, c'est-à-dire que la $i^{\text{ème}}$ composante du poids de T est $\mu_i + \frac{1}{2}$ et $t_{i-1} \leq 2i - 2$. Alors le numéro $2i - 1$ ne figure pas sur la première colonne de T . Ceci se reformule en : si la $i^{\text{ème}}$ composante du poids de T est $\mu_i + \frac{1}{2}$ et $t_{i-1} \leq 2i - 2$, alors $t_i \neq 2i - 1$. Mais il est évident que si $t_{i-1} \geq 2i - 1$, alors $t_i \neq 2i - 1$, et la condition sur t_{i-1} est donc superflue.

Il reste à traiter la condition portant sur s_m , à savoir $s_m = 1$ si et seulement si $\lambda_m > 0$. Pour cela, il nous faut déterminer s_m . On rappelle les notations du premier chapitre : $\sigma_c = -\text{id}$ et $\sigma = \sigma_c h_c$. Soit $w_{\tilde{\lambda}}$ le vecteur de plus haut poids de $L_2(\tilde{\lambda})$, sur lequel σ agit par multiplication par s_m . Comme $\varepsilon_i(h) = -1$ pour tout i , on voit que σ_c agit sur $w_{\tilde{\lambda}}$ par multiplication par $s_m(-1)^{\sum \tilde{\lambda}_i}$. Considérons maintenant un produit tensoriel $\Lambda^{n+\frac{1}{2}-\mu_i} V_2 \otimes L(\gamma^{i-1}, s_{i-1})$ sous σ_c . Si $L(\gamma^i, s_i)$ en est un facteur direct, on a vu que σ_c agit par multiplication par $s_i = s_{i-1}(-1)^{n+\frac{1}{2}-\mu_i}$ sur $L(\gamma^i)$. On trouve donc $(-1)^{\sum(n+\frac{1}{2}-\mu_i)} = s_m(-1)^{\sum \tilde{\lambda}_i}$. Si $\lambda_m > 0$, on a $\sum \tilde{\lambda}_i + \sum(\lambda_i - \frac{1}{2}) = mn$, et si $\lambda_m < 0$, on a $\sum \tilde{\lambda}_i + \sum_{i \neq m}(\lambda_i - \frac{1}{2}) - \lambda_m - \frac{1}{2} = mn$. On en déduit $s_m = (-1)^{\sum(\lambda_i - \mu_i)}$ si $\lambda_m > 0$ et $s_m = -(-1)^{\sum(\lambda_i - \mu_i)}$ si $\lambda_m < 0$, et la condition devient $\sum(\lambda_i - \mu_i)$ pair, ce qui est automatique si $\lambda \geq \mu$.

□

On voit facilement que ces formules sont identiques à celles de Proctor [40] ou Koike et Terada [30], en s'appuyant sur la remarque suivante lorsque $G = \text{SO}(2m)$: si on considère un $\text{SO}(2m)$ -tableau sur $Y(\lambda)$ et qu'on omet, dans un premier temps,

la condition sur s_m , on voit que tous les signes sont déterminés si on connaît le tableau non signé et les signes sur les lignes $i + 1$ telles que la ligne i ne porte pas de signe et la ligne $i + 1$ porte un signe, c'est-à-dire $t_i = 2i + 1$ et $t_{i+1} = 2i + 2$.

5.5 Caractères de $O(2n)$ en caractéristique zéro

On se propose ici de démontrer, à l'aide des paires duales, la formule donnant le caractère des représentations irréductibles de $O(2n)$ sur la seconde composante connexe de ce groupe. On rappelle brièvement l'énoncé du théorème 1.18 donnant cette formule. On introduit les notations suivantes : pour tout $l \geq 1$ et tout poids dominant λ de $\mathrm{Sp}(2l)$, $L^{(2l)}(\lambda)$ désigne la représentation irréductible de $\mathrm{Sp}(2l)$ de plus haut poids λ . Si λ est un poids dominant de $\mathrm{SO}(2n)$ tel que $\lambda_n = 0$, on pose

$$\chi^\sigma L(\lambda, +) = \sum_{\mu_n=0} (\dim L(\lambda, +)_{(\mu,+)} - \dim L(\lambda, +)_{(\mu,-)}) e^\mu$$

et on identifie $\lambda = \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i$ à un poids dominant de $\mathrm{Sp}(2n - 2)$.

Théorème *Soit λ un poids dominant de $\mathrm{SO}(2n)$ tel que $\lambda_n = 0$. On a*

$$\chi^\sigma L(\lambda, +) = \mathrm{ch} L^{(2n-2)}(\lambda).$$

Pour démontrer ce théorème, on considère la paire $(G_1, G_2) = (\mathrm{SO}(2m), O(2n))$, mais on inverse les rôles : on calcule le caractère d'une représentation de G_2 en étudiant les produits tensoriels des représentations de G_1 . Le principe de la preuve étant toujours le même, on se contente d'en exposer les points clés. On notera l'inversion de la notation $\tilde{\lambda}$, qui désigne ici le poids de G_1 correspondant au poids λ de G_2 .

Proposition 5.14 *Soit $v \in \Lambda N_1$ de poids ν sous la seconde action du tore de $\mathrm{SO}(2n)$. Le poids de v sous l'action de ce tore est $\nu + m \sum_{i=1}^n \varepsilon_i$.*

Corollaire 5.15 *Pour tout poids μ de $\mathrm{SO}(2n)$ on a $\mathbb{M}_\mu = \Lambda^\mu V_1$.*

Proposition 5.16 *Soit μ un poids de $\mathrm{SO}(2n)$ avec $\mu_n = 0$. On a l'égalité entre G_1 -modules*

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_{(\mu,+)} &= L_1(2\omega_+) \otimes \bigotimes_{i=1}^{n-1} \Lambda^{m-\mu_i} V_1, \\ \mathbb{M}_{(\mu,-)} &= L_1(2\omega_-) \otimes \bigotimes_{i=1}^{n-1} \Lambda^{m-\mu_i} V_1. \end{aligned}$$

Démonstration. A l'aide de 4.5, on obtient immédiatement les inclusions suivantes dans ΛN_1 :

$$(x_1 \otimes y_{-n}) \wedge \cdots \wedge (x_{m-1} \otimes y_{-n}) \wedge (x_m \otimes y_{-n}) \otimes \bigotimes_{i=1}^{n-1} (\Lambda^{m-\mu_i} V_1 \otimes y_{-i}) \subset \mathbb{M}_{(\mu,+)},$$

5.5. CARACTÈRES DE $O(2N)$ EN CARACTÉRISTIQUE ZÉRO

$(x_1 \otimes y_{-n}) \wedge \cdots \wedge (x_{m-1} \otimes y_{-n}) \wedge (x_{-m} \otimes y_{-n}) \otimes \bigotimes_{i=1}^{n-1} (\Lambda^{m-\mu_i} V_1 \otimes y_{-i}) \subset \mathbb{M}_{(\mu,-)}$,
 et comme $\mathbb{M}_{(\mu,+)}$, $\mathbb{M}_{(\mu,-)}$ sont des G_1 -modules, on en déduit

$$L_1(2\omega_+) \otimes \bigotimes_{i=1}^{n-1} \Lambda^{m-\mu_i} V_1 \subset \mathbb{M}_{(\mu,+)},$$

$$L_1(2\omega_-) \otimes \bigotimes_{i=1}^{n-1} \Lambda^{m-\mu_i} V_1 \subset \mathbb{M}_{(\mu,-)}.$$

De plus $\mathbb{M}_\mu = \Lambda^\mu V_1$, $\mathbb{M}_\mu = \mathbb{M}_{(\mu,+)} \oplus \mathbb{M}_{(\mu,-)}$ et $\Lambda^\mu V_1 = \left(L_1(2\omega_+) \otimes \bigotimes_{i=1}^{n-1} \Lambda^{m-\mu_i} V_1 \right) \oplus \left(L_1(2\omega_-) \otimes \bigotimes_{i=1}^{n-1} \Lambda^{m-\mu_i} V_1 \right)$, ce qui achève la démonstration. \square

On a maintenant tous les résultats nécessaires à la démonstration du théorème 1.18. Soit λ un poids dominant de $SO(2n)$ tel que $\lambda_n = 0$ et considérons la représentation $L(\lambda, +)$, où σ agit trivialement sur le vecteur de plus haut poids λ . On fixe $m \geq \lambda_1$, et on remarque que le poids correspondant $\tilde{\lambda}$ de G_1 vérifie $\tilde{\lambda}_m > 0$. On doit prouver que pour tout poids μ de $SO(2n)$ tel que $\mu_n = 0$ on a

$$\dim L(\lambda, +)_{(\mu,+)} - \dim L(\lambda, +)_{(\mu,-)} = \dim L^{(2n-2)}(\lambda)_\mu.$$

Posons $S^\mu = \bigotimes_{i=1}^{n-1} \Lambda^{m-\mu_i} V_1$. D'après ce qui précède, $\dim L(\lambda, +)_{(\mu,+)} - \dim L(\lambda, +)_{(\mu,-)}$
 $= [S^\mu \otimes L_1(2\omega_+) : L_1(\tilde{\lambda})] - [S^\mu \otimes L_1(2\omega_-) : L_1(\tilde{\lambda})]$. Si on tord la représentation $S^\mu \otimes L_1(2\omega_+)$ par σ , on voit immédiatement que $\text{ch } S^\mu (\text{ch } L_1(2\omega_+) - \text{ch } L_1(2\omega_-))$ est dans le \mathbb{Z} -module engendré par la famille libre $(\text{ch } L_1(\beta) - \text{ch } L_1(\tau(\beta)))_{\beta_m \geq 1}$, et la multiplicité de $\text{ch } L_1(\tilde{\lambda})$ dans $\text{ch } S^\mu (\text{ch } L_1(2\omega_+) - \text{ch } L_1(2\omega_-))$ est la même que celle de $\text{ch } L_1(\tilde{\lambda}) - \text{ch } L_1(\tau(\tilde{\lambda}))$.

Or la proposition 2.3 nous donne, si $\beta \in P_1^+$ est tel que $\beta_m \geq 1$:

$$\text{ch } \Lambda^l V_1 (\text{ch } L_1(\beta) - \text{ch } L_1(\tau(\beta))) = \sum_{(\delta, \gamma)} (\text{ch } L_1(\gamma) - \text{ch } L_1(\tau(\gamma)))$$

où les couples (δ, γ) vérifient

- (i) On a $\delta = \beta + \phi \in P^+$ où ϕ est une somme de ε_i deux à deux distincts.
- (ii) On a $\gamma = \beta + \phi - \psi \in P^+$ où ψ est une somme de ε_j deux à deux distincts.
- (iii) Si h est le nombre de termes de ϕ et k celui de ψ , on a $h + k = l$.
- (iv) $\gamma_m \geq 1$.

En retirant la première colonne des diagrammes $Y(\beta)$, $Y(\gamma)$, on fait apparaître la combinatoire du groupe symplectique $\text{Sp}(2m)$: si on identifie les poids dominants δ de $SO(2m)$ tels que $\delta_m \geq 0$ à des poids dominants de $\text{Sp}(2m)$, la multiplicité de $(\text{ch } L_1(\gamma) - \text{ch } L_1(\tau(\gamma)))$ dans $\text{ch } \Lambda^l V_1 (\text{ch } L_1(\beta) - \text{ch } L_1(\tau(\beta)))$ est exactement la multiplicité de $L^{(2m)}(\gamma - \sum_{i=1}^m \varepsilon_i)$ dans $\Lambda^l V_1 \otimes L^{(2m)}(\beta - \sum_{i=1}^m \varepsilon_i)$. On en déduit que la multiplicité de $(\text{ch } L_1(\tilde{\lambda}) - \text{ch } L_1(\tau(\tilde{\lambda})))$ dans $\text{ch } \Lambda^{m-\mu_{n-1}} V_1 \cdots \text{ch } \Lambda^{m-\mu_1} V_1 (\text{ch } L_1(2\omega_+) - \text{ch } L_1(2\omega_-))$ est la même que celle de $L^{(2m)}(\tilde{\lambda} - \sum_{i=1}^m \varepsilon_i)$ dans $\Lambda^{m-\mu_{n-1}} V_1 \otimes (\cdots \otimes$

CHAPITRE 5. CARACTÈRES EN CARACTÉRISTIQUE ZÉRO

$(\Lambda^{m-\mu_1} V_1 \otimes L^{(2m)}(0)) \dots$). En considérant la paire duale $(\mathrm{Sp}(2m), \mathrm{Sp}(2n-2))$, on voit que ceci n'est autre que $\dim L^{(2n-2)}(\lambda)_\mu$.

Chapitre 6

Caractères en caractéristique p

Dans ce chapitre, on doit apporter deux modifications notables aux raisonnements du chapitre précédent sur les suites de diagrammes gauches $\gamma^0 \rightarrow \gamma^1, \gamma^1 \rightarrow \gamma^2, \dots, \gamma^{m-1} \rightarrow \gamma^m$. D'une part on doit avoir $\gamma^i \in C^0$ pour tout i pour pouvoir appliquer la formule modulaire de Verlinde (§3.3.3), d'autre part on doit exclure certains tableaux gauches en vertu de cette même formule.

On traite d'abord le groupe symplectique dans deux situations simples, déjà étudiées dans [19] et [42] par des méthodes complètement différentes, où la formule modulaire de Verlinde n'apporte en fait aucun terme correctif à la multiplicité de caractéristique zéro. On traite ensuite des cas particuliers analogues pour les autres groupes classiques connexes, puis on énonce les formules de caractères les plus générales, en remarquant que leur domaine de validité diffère de celui de la conjecture de Lusztig. On termine ce chapitre en observant la stabilité, en un certain sens, des formules de caractères obtenues.

Notons qu'il est aujourd'hui possible de calculer numériquement des caractères en caractéristique p grâce à quelques programmes disponibles sur le web (cf. [31]), et c'est évidemment aussi le cas pour la caractéristique zéro (cf. [34], Maple ou Gap).

6.1 Formules particulières pour le groupe symplectique

Dans les chapitres suivants (proposition 7.21, théorème 8.16), on calculera le caractère de n'importe quelle représentation fondamentale de $\mathrm{Sp}(2m)$. Le théorème suivant en est un cas particulier sous forme combinatoire, qui améliore un résultat de Gow [19]. Notons que dans l'énoncé ci-dessous, le poids μ est nécessairement conjugué à un poids fondamental d'après 4.15.

Théorème 6.1 *Soit $G = \mathrm{Sp}(2m)$. Si $l \geq m + 2 - p$, $\dim L(\omega_l)_\mu$ est le nombre de $\mathrm{Sp}(2m)$ -tableaux T de forme $Y(\omega_l)$ et de poids μ tels que pour tout $i \leq m$, le nombre de boîtes de $T[2i]$ est $\geq i + 2 - p$.*

CHAPITRE 6. CARACTÈRES EN CARACTÉRISTIQUE p

Si $p = 2$, l'énoncé se simplifie : le nombre de boîtes de $T[2i]$ doit être égal à i pour tout $i \leq m$ puisque $t_{i+1} \geq 2i + 1$. Par conséquent $\dim L(\omega_m) = 2^m$, les poids de $L(\omega_m)$ sont les poids conjugués à ω_m et ils sont sans multiplicité.

Démonstration. On choisit $n = 1$, ce qui signifie que \mathbb{M} est une $(\mathrm{Sp}(2m), \mathrm{Sp}(2))$ paire duale. On sait déjà que pour tout i on a $-1 \leq \mu_i \leq 1$, et la condition $\tilde{\lambda} \in C^0$ équivaut à $m - l \leq p - 2$. Reprenons les notations de 3.27 : si on a $\beta, \gamma \in C^0$ et $C_{s_0 \cdot \gamma}$ non nul, la combinatoire de caractéristique zéro implique $s_0 \cdot \gamma = \beta, \beta + 1$ ou $\beta - 1$, en particulier $s_0 \cdot \gamma$ est dans l'adhérence de C_{fond} , mais 3.27 montre qu'on a aussi $s_0 \cdot \gamma$ en dehors de cette adhérence, ce qui est absurde. On a donc $D_\gamma = C_\gamma$ pour tout $\gamma \in C^0$. Considérons une suite de diagrammes gauches $\gamma^0 \rightarrow \gamma^1, \gamma^1 \rightarrow \gamma^2, \dots, \gamma^{m-1} \rightarrow \gamma^m$ avec $\gamma^0 = 0, \gamma^m = \tilde{\lambda} = m - l$ et $\gamma^i \in C^0$ pour tout i . La multiplicité de $T_2(\gamma^i)$ dans $\Lambda^{n-\mu_i} V_2 \otimes T_2(\gamma^{i-1})$ est donnée par le nombre de pseudo-GL(2)-tableaux gauches de forme $\gamma^{i-1} \rightarrow \gamma^i$ et de poids μ_i . La dimension de $L_1(\omega_l)_\mu$ est donc le nombre de tableaux $\mathrm{Sp}(2m)$ -pseudo-standard T de forme $Y(2m - l)$, de poids μ et soumis à la condition : le diagramme $T[2i] \setminus R(1, i)$ a au plus $p - 2$ boîtes pour tout i . Autrement dit on a au plus $p - 2 + i$ boîtes de numéro $\leq 2i$ sur l'unique ligne de T , c'est-à-dire au moins $i - p + 2$ boîtes de numéro $\leq 2i$ sur l'unique colonne du tableau $\mathrm{Sp}(2m)$ -standard $\phi(T)$. \square

Ce théorème fournit en particulier le caractère de $L(\omega_m)$ en tout caractéristique. Si $p \geq m + 1$, on voit que pour tout tableau T , le nombre de boîtes de $T[2i]$ est supérieur ou égal à $i + 2 - p$ pour tout $i \leq m$, et le caractère de tous les modules simples de plus haut poids un poids fondamental est le même qu'en caractéristique zéro. Si $p \leq m$, la remarque suivant la proposition 8.12 montre qu'au moins un de ces modules simples n'a pas le même caractère qu'en caractéristique zéro.

Exemple 6.2 Le théorème 6.1 nous permet de calculer le caractère de $L(\omega_2)$ lorsque $p \geq m$. D'après ce qu'on vient de voir, il ne nous reste qu'à traiter le cas où $p = m$. Sous cette hypothèse, la seule contrainte est que le nombre de boîtes de $T[2(m - 1)]$ soit supérieur ou égal à $m - 1 + 2 - p = 1$, ce qui signifie que T doit contenir au moins un numéro inférieur ou égal à $2m - 2$. Autrement dit le tableau $\begin{array}{|c|} \hline 2m - 1 \\ \hline 2m \\ \hline \end{array}$, de poids nul, est exclu. On a donc $\mathrm{ch} L(\omega_2) = \mathrm{ch} \Delta(\omega_2) - e^0$.

Les représentations de $\mathrm{Sp}(2m)$ de plus haut poids un poids fondamental ω_l tel que $l \geq m + 2 - p$ ont déjà été étudiées dans [19], dont on rappelle un des principaux résultats. On considère un certain opérateur de contraction $\partial : \Lambda V \rightarrow \Lambda V$ $\mathrm{Sp}(2m)$ -équivariant de degré -2 . En caractéristique zéro, on montre que pour tout $0 \leq k \leq m$ on a $\ker \partial \cap \Lambda^k V = L(\omega_k)$. En caractéristique p , le module $\ker \partial \cap \Lambda^k V / \partial^{p-1}(\Lambda^{k+2p-2} V)$ est trivial si $k < m - p + 2$ et égal à $L(\omega_k)$ sinon. Cette réalisation explicite ne permet pas d'obtenir le caractère des $L(\omega_k)$, mais elle fournit une formule de récurrence pour leur dimension, formule qui découle facilement du théorème que nous venons de démontrer.

6.1. FORMULES PARTICULIÈRES POUR LE GROUPE SYMPLECTIQUE

Le théorème suivant, déjà démontré par Suprunenko et Zalesskii [42], fournit un autre exemple de formule de caractère.

Théorème 6.3 *Soit $G = \mathrm{Sp}(2m)$, $p \geq 3$, $\lambda_1 = \frac{p-3}{2}\omega_m + \omega_{m-1}$, $\lambda_2 = \frac{p-1}{2}\omega_m$. On a $\dim L(\lambda_1) = \frac{p^m-1}{2}$, $\dim L(\lambda_2) = \frac{p^m+1}{2}$, les poids de ces représentations sont sans multiplicité et $\mu = \sum_{i=1}^m \mu_i \varepsilon_i$ est un poids de $L(\lambda_1)$ (resp. $L(\lambda_2)$) si et seulement si il vérifie les conditions suivantes :*

- 1) $\forall i, |\mu_i| \leq \frac{p-1}{2}$.

- 2) on a un nombre impair (resp. pair) de $\frac{p-1}{2} - \mu_i$ impairs.

Démonstration. On choisit n tel que $p = 2n + 1$, ce qui est possible puisque p est impair. Comme $p \geq 2n$, C^0 est non vide et on a $C^0 = \{0, \varepsilon_1\}$. Il est plus simple de raisonner directement avec $\tilde{\lambda}$ sans invoquer la correspondance de la proposition 5.7. On a $\tilde{\lambda} = 0$ ou $\tilde{\lambda} = \varepsilon_1$, c'est-à-dire $\lambda = \lambda_1$ ou $\lambda = \lambda_2$. On convient de noter T tout module basculant appartenant à l'idéal tensoriel \mathcal{I} défini au paragraphe 3.3.3. Si $l \leq 2n$, il résulte de 3.24 que $\Lambda^l V_2 = T_2(0) \oplus T$ si l est pair et $\Lambda^l V_2 = T_2(\varepsilon_1) \oplus T$ si l est impair. On a donc

$$\Lambda^l V_2 \otimes T_2(0) = T_2(0) \oplus T \text{ et } \Lambda^l V_2 \otimes T_2(\varepsilon_1) = T_2(\varepsilon_1) \oplus T \text{ si } l \text{ est pair,}$$

$$\Lambda^l V_2 \otimes T_2(0) = T_2(\varepsilon_1) \oplus T \text{ et } \Lambda^l V_2 \otimes T_2(\varepsilon_1) = T_2(0) \oplus T \text{ si } l \text{ est impair.}$$

Le dernier cas demande une démonstration. Il faut montrer que $T_2(\varepsilon_1) \otimes T_2(\varepsilon_1) = T(0) \oplus T$, ce qui résulte du lemme 3.17 : si $n = 1$ on a $T_2(\varepsilon_1) \otimes T_2(\varepsilon_1) = T_2(0) \oplus T_2(2\varepsilon_1)$, et si $n \geq 2$ on a $T_2(\varepsilon_1) \otimes T_2(\varepsilon_1) = T_2(0) \oplus T_2(2\varepsilon_1) \oplus T_2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$.

Traisons le cas $\tilde{\lambda} = 0$. Si μ est un poids de $L(\lambda_2)$ on sait que $-n \leq \mu_i \leq n$ pour tout i , et sous cette hypothèse on a $\dim L(\lambda_2)_\mu = [\bigotimes_{i=1}^m \Lambda^{n-\mu_i} V_2 : T_2(0)] = 1$ si et seulement si on a un nombre pair de $n - \mu_i$ impairs, et $\dim L(\lambda_2)_\mu = 0$ sinon. On a n valeurs impaires possibles pour $n - \mu_i$ et $n + 1$ valeurs paires. Pour calculer $\dim L(\lambda_2)$, il faut d'abord choisir un nombre pairs d'indices i parmi m , et pour ces indices $n - \mu_i$ peut prendre n valeurs. Pour les autres indices, $n - \mu_i$ peut prendre $n + 1$ valeurs. On a donc

$$\begin{aligned} \dim L(\lambda_2) &= \sum_i C_m^{2i} n^{2i} (n+1)^{m-2i} = \frac{1}{2} ((n+1+n)^m + (n+1-n)^m) \\ &= \frac{1}{2} ((2n+1)^m + 1) = \frac{p^m + 1}{2}. \end{aligned}$$

On obtient de même, pour $\tilde{\lambda} = \varepsilon_1$:

$$\dim L(\lambda_1) = \sum_i C_m^{2i+1} n^{2i+1} (n+1)^{m-2i-1} = \frac{1}{2} ((n+1+n)^m - (n+1-n)^m)$$

CHAPITRE 6. CARACTÈRES EN CARACTÉRISTIQUE P

$$= \frac{1}{2}((2n+1)^m - 1) = \frac{p^m - 1}{2}.$$

□

Ce théorème a déjà été obtenu sous une forme équivalente dans [42], à l'aide des représentations de Weil des groupes symplectiques finis. Si on note Φ_k^i ($i = 1, 2$) la représentation $L(\lambda_i)$ de $\mathrm{Sp}(2k)$ et $\Phi_{l,k-l}^i$ sa restriction au sous-groupe $\mathrm{Sp}(2l) \times \mathrm{Sp}(2(k-l))$, il est démontré dans [42] que $\dim \Phi_k^i = \frac{p^k + (-1)^i}{2}$, les poids de Φ_k^i sont sans multiplicité et $\Phi_{l,k-l}^1 = (\Phi_l^1 \otimes \Phi_{k-l}^2) \oplus (\Phi_l^2 \otimes \Phi_{k-l}^1)$, $\Phi_{l,k-l}^2 = (\Phi_l^1 \otimes \Phi_{k-l}^1) \oplus (\Phi_l^2 \otimes \Phi_{k-l}^2)$. En prenant $l = 1$, on en déduit par récurrence sur k la détermination des poids de Φ_k^i .

On vient de voir que si $G = \mathrm{Sp}(2m)$, les cas $n = 1$ et $p = 2n + 1$ sont très simples à traiter et on en a déduit des formules de caractères nouvelles ou non triviales. On obtient des formules analogues au théorème 6.1 pour les autres groupes dans la section qui suit, mais si $G = \mathrm{SO}(2m + 1)$ ou $\mathrm{SO}(2m)$ et $p = 2n - 1$ (resp. $G = \mathrm{Spin}(2m + 1)$ ou $\mathrm{Spin}(2m)$ et $p = 2n + 1$), la situation est beaucoup plus décevante : on a $\tilde{\lambda} \in C^0$ si et seulement si $\tilde{\lambda} = 0, \varepsilon_1, \omega_+$ ou ω_- , ce qui donne

1. $\lambda = (p+1)\omega_+$ ou $p\omega_+ + \omega_-$ si $G = \mathrm{SO}(2m)$.
2. $\lambda = (p+1)\omega_+$ si $G = \mathrm{SO}(2m+1)$.
3. $\lambda = p\omega_+$ si $G = \mathrm{Spin}(2m+1)$.
4. $\lambda = p\omega_+$ ou $p\omega_-$ si $G = \mathrm{Spin}(2m)$.

Le caractère de $L(\lambda)$ se déduit alors immédiatement du théorème du produit tensoriel de Steinberg.

6.2 Formules particulières pour les autres groupes

Dans cette section, on prend $n = 1$ si $G = \mathrm{Spin}(2m+1)$ ou $\mathrm{Spin}(2m)$ et $n = 2$ si $G = \mathrm{SO}(2m+1)$ ou $\mathrm{SO}(2m)$, et on applique la formule modulaire de Verlinde pour calculer les multiplicités sous G_2 . Si $G = \mathrm{SO}(2m+1)$, on a vu dans la proposition 3.27 que la formule modulaire de Verlinde n'apporte aucun terme correctif à la multiplicité de caractéristique zéro. On a donc seulement trois lemmes techniques à énoncer.

Lemme 6.4 *Soit $G_2 = \mathrm{Spin}(3)$, $l \leq \dim V_2$ et supposons $2\beta_1, 2\gamma_1 \leq p - 2$ (i. e. $\beta, \gamma \in C^0$). La multiplicité de $T_2(\gamma)$ dans $\Lambda^l V_2 \otimes T_2(\beta)$ est égale au nombre de pseudo- $\mathrm{GL}(2)$ -tableaux gauches de forme $\beta \rightarrow \gamma$ et de poids $1 - l$ ou $2 - l$, sauf si ($2\beta_1 = p - 2$, $\gamma = \beta$ et $l = 1$ ou 2), auquel cas la multiplicité est nulle.*

Démonstration. On a $D_\gamma = C_\gamma$ pour tout $\gamma \in C^0$ si $2\beta_1 < p - 2$, et si $2\beta_1 = p - 2$ on a $D_\beta = C_\beta - C_{s_0 \cdot \beta}$ et $D_\gamma = C_\gamma$ pour tout $\gamma \in C^0$ distinct de β . Si $2\beta_1 = p - 2$ et $C_{s_0 \cdot \beta} \neq 0$, comme $s_0 \cdot \beta = \beta + \varepsilon_1$ on déduit de 2.3 que $l = 1$ ou $l = 2$. Dans les deux cas on a $C_\beta = C_{s_0 \cdot \beta} = 1$. On a donc $D_\beta = 0$ si ($l = 1$ ou $l = 2$) et $2\beta_1 = p - 2$. □

6.2. FORMULES PARTICULIÈRES POUR LES AUTRES GROUPES

On déduit immédiatement de la proposition 3.31 les deux lemmes qui suivent.

Lemme 6.5 Soient $G_2 = \text{Pin}(4)$, $l \leq \dim V_2$, et supposons β et γ dans C^0 avec $\beta_2 \geq \frac{1}{2}$ et $\gamma_2 \geq \frac{1}{2}$. La multiplicité de $T_2(\gamma, 0)$ dans $\Lambda^l V_2 \otimes T_2(\beta, 0)$ est égale au nombre de pseudo- $\text{GL}(2)$ -tableaux gauches de forme $\beta \rightarrow \gamma$ et de poids $2 - l$ vérifiant les conditions suivantes.

1. Si $\beta_n = \gamma_n = \frac{1}{2}$, on autorise un coefficient particulier dans l'unique boîte de $\beta \rightarrow \gamma$ sur la ligne n : il s'agit d'un 2 suivi d'un dièse, indiquant que ce 2 ne doit pas être pris en compte dans le calcul du poids du tableau.
2. Si $\beta_1 + \beta_2 = p - 2$, $\gamma = \beta$ et $l = 2$, on exclut le tableau tel que le numéro 1 figure sur la première ligne et le numéro 2 figure sur la seconde ligne.

Lemme 6.6 Soient $G_2 = \text{O}(4)$, $l \leq \dim V_2$, et supposons β et γ dans C^0 avec $\beta_2 \geq 0$, $\gamma_2 \geq 0$ et $s, t \in \{+, -, 0\}$. La multiplicité de $T_2(\gamma, t)$ dans $\Lambda^l V_2 \otimes T_2(\beta, s)$ est égale au nombre de pseudo- $\text{GL}(2)$ -tableaux gauches de forme $\beta \rightarrow \gamma$ et de poids $2 - l$ vérifiant les conditions suivantes.

1. Supposons $\beta_n = \gamma_n = 0$. Si $s = t$, il n'existe pas de i tel que $(\beta_i = 0$ et le tableau a un 1 et pas de 2 sur la ligne i). Si $s \neq t$, alors le tableau a un 1 et pas de 2 sur la ligne n .
2. Supposons $\beta_1 + \beta_2 = p - 2$, $\gamma = \beta$ et $l = 2$. Si $\beta_2 \geq 1$, on exclut le tableau tel que le numéro 1 figure sur la première ligne et le numéro 2 figure sur la seconde ligne. Si $\beta_2 = 0$ la multiplicité est nulle.

Pour tout $0 \leq l \leq m$ on pose $\Omega_l = \sum_{i=1}^l \varepsilon_i$. A l'aide de 5.2, et en remarquant que si $\beta \in P_2^+$ est demi-entier, $\beta_1 + \beta_2 - 1$ est égal au nombre total de boîtes de $Y(\beta)$, on obtient sans difficulté les théorèmes suivants.

Théorème 6.7 Soit $G = \text{Spin}(2m + 1)$. Si $l \geq m + \frac{3-p}{2}$, $\dim L(\omega_+ + \Omega_l)_\mu$ est le nombre de $\text{Spin}(2m + 1)$ -tableaux T de forme $Y(\omega_+ + \Omega_l)$ et de poids μ tels que

1. Pour tout $1 \leq i \leq m$, le nombre de boîtes total de $T[2i]$ est $\geq i + \frac{3-p}{2}$.
2. Pour tout $1 \leq i \leq m$, si le nombre de boîtes total de $T[2i - 2]$ est égal à $i - 1 + \frac{3-p}{2}$ et $\mu_i = \pm \frac{1}{2}$, on exclut les tableaux tels qu'on a exactement une boîte dont le numéro est $2i$ ou $2i - 1$.

Théorème 6.8 Soit $G = \text{Spin}(2m)$. Si $l \geq m + \frac{3-p}{2}$, $\dim L(\omega_+ + \Omega_l)_\mu$ est le nombre de $\text{Spin}(2m)$ -tableaux T de forme $Y(\omega_+ + \Omega_l)$ et de poids μ tels que pour tout $1 \leq i \leq m$, le nombre de boîtes total de $T[2i]$ est $\geq i + \frac{3-p}{2}$.

Théorème 6.9 Soit $G = \text{SO}(2m + 1)$. Si $l + k \geq 2m + 3 - p$, $\dim L(\Omega_k + \Omega_l)_\mu$ est le nombre de $\text{SO}(2m + 1)$ -tableaux T de forme $Y(\Omega_k + \Omega_l)$ et de poids μ tels que

1. Pour tout $1 \leq i \leq m$, le nombre de boîtes total de $T[2i]$ est $\geq 2i + 3 - p$.

2. Pour tout $1 \leq i \leq m$, si le nombre de boîtes total de $T[2i - 2]$ est égal à $2i + 1 - p$ et $\mu_i = 0$, on exclut les tableaux tels que $2i - 1$ figure sur la première colonne, $2i$ n'y figure pas, $2i$ figure sur la seconde colonne, $2i - 1$ n'y figure pas.

Théorème 6.10 Soit $G = \mathrm{SO}(2m)$. Si $l + k \geq 2m + 2 - p$, $\dim L(\Omega_k + \Omega_l)_\mu$ est le nombre de $\mathrm{SO}(2m + 1)$ -tableaux T de forme $Y(\Omega_k + \Omega_l)$ et de poids μ tels que

1. Pour tout $1 \leq i \leq m$, le nombre de boîtes total de $T[2i]$ est $\geq 2i + 2 - p$.
2. Pour tout $1 \leq i \leq m$, si le nombre de boîtes total de $T[2i - 2]$ est égal à $2i - p$, $\mu_i = 0$ et $t_i \geq 2i + 1$, on exclut les tableaux tels que $2i - 1$ figure sur la première colonne, $2i$ n'y figure pas, $2i$ figure sur la seconde colonne, $2i - 1$ n'y figure pas.
3. Pour tout $1 \leq i \leq m$, si le nombre de boîtes total de $T[2i - 2]$ est égal à $2i - p$, $\mu_i = 0$ et $t_i \leq 2i$, on exclut les tableaux tels qu'on a exactement une boîte dont le numéro est $2i$ ou $2i - 1$ sur chacune des deux colonnes.

6.3 Situation générale

On procède comme dans la section précédente, en supposant $n \geq 2$ si $G_2 = \mathrm{Sp}(2n)$ ou $\mathrm{Spin}(2m + 1)$, et $n \geq 3$ si $G_2 = \mathrm{Pin}(2n)$ ou $\mathrm{O}(2n)$. Les différents cas se traitant de manière similaire, on les regroupe dans un seul et même lemme.

Lemme 6.11 Soit $l \leq \dim V_2$ et supposons β et γ dans C^0 , $\beta_n \geq 0$ et $\gamma_n \geq 0$.

1. Si $G_2 = \mathrm{Sp}(2n)$, la multiplicité de $T_2(\gamma)$ dans $\Lambda^l V_2 \otimes T_2(\beta)$ est égale au nombre de pseudo- $\mathrm{GL}(2)$ -tableaux gauches de forme $\beta \rightarrow \gamma$ et de poids $n - l$ avec la restriction suivante si $\beta_1 + \beta_2 = p - 2n$: on exclut les tableaux tels que le numéro 2 figure sur la première ligne, le numéro 1 n'y figure pas, le numéro 1 figure sur la seconde ligne et le numéro 2 n'y figure pas.
2. Si $G_2 = \mathrm{Spin}(2n + 1)$ et β, γ demi-entiers, alors la multiplicité de $T_2(\gamma, 0)$ dans $\Lambda^l V_2 \otimes T_2(\beta, 0)$ est égale au nombre de pseudo- $\mathrm{GL}(2)$ -tableaux gauches de forme $\beta \rightarrow \gamma$ et de poids $n - l$ ou $n - l + 1$ avec la restriction suivante si $2\beta_1 = p - 2n$: si le poids est $n - l$, on exclut les tableaux tels que le numéro 1 figure sur la première ligne et le numéro 2 n'y figure pas. Si le poids est $n - l + 1$, on exclut les tableaux tels que la première ligne contient exactement une boîte qu'on note b , et il y a au moins une ligne contenant une unique boîte située dans la colonne de b et portant le numéro 2.
3. Si $G_2 = \mathrm{Pin}(2n)$ et β, γ demi-entiers, alors la multiplicité de $T_2(\gamma, 0)$ dans $\Lambda^l V_2 \otimes T_2(\beta, 0)$ est égale au nombre de pseudo- $\mathrm{GL}(2)$ -tableaux gauches de forme $\beta \rightarrow \gamma$ et de poids $n - l$ vérifiant les conditions suivantes.
 - (a) Si $\beta_n = \gamma_n = \frac{1}{2}$, on autorise un coefficient particulier dans l'unique boîte de $\beta \rightarrow \gamma$ sur la ligne n : il s'agit d'un 2 suivi d'un dièse, indiquant que ce 2 ne doit pas être pris en compte dans le calcul du poids du tableau.

6.3. SITUATION GÉNÉRALE

- (b) Supposons $\beta_1 + \beta_2 = p - 2n + 2$. On exclut les tableaux tels que le numéro 1 figure sur la première ligne, le numéro 2 n'y figure pas, la seconde ligne contient exactement une boîte qu'on note b , et il y a au moins une ligne, distincte de la ligne n , contenant une unique boîte située dans la colonne de b et portant le numéro 2.
4. Si $G_2 = \mathrm{O}(2n)$ et $s, t \in \{+, -, 0\}$, alors la multiplicité de $T_2(\gamma, t)$ dans $\Lambda^l V_2 \otimes T_2(\beta, s)$ est égale au nombre de pseudo-GL(2)-tableaux gauches de forme $\beta \rightarrow \gamma$ et de poids $n - l$ vérifiant les conditions suivantes.
- (a) Supposons $\beta_n = \gamma_n = 0$. Si $s = t$, il n'existe pas de i tel que ($\beta_i = 0$ et le tableau a un 1 et pas de 2 sur la ligne i). Si $s \neq t$, alors le tableau a un 1 et pas de 2 sur la ligne n .
- (b) Supposons $\beta_1 + \beta_2 = p - 2n + 2$. Si $\beta_2 \neq 0$, on exclut les tableaux tels que le numéro 2 figure sur la première ligne, le numéro 1 n'y figure pas, le numéro 1 figure sur la seconde ligne et le numéro 2 n'y figure pas. Si $\beta_2 = 0$, on exclut les tableaux où 1 figure sur la première ligne et pas sur les autres, et ceux où 2 figure sur la première ligne et pas sur les autres.

Démonstration. On reprend les notations de 3.27.

Soit $G_2 = \mathrm{Sp}(2n)$. On sait que $D_\gamma = C_\gamma - C_{s_0 \cdot \gamma}$, et $C_{s_0 \cdot \gamma}$ est non nul seulement si $(\beta + \rho)(h_0) = p - 1$ et $s_0 \cdot \gamma = \gamma + \alpha_0 = \beta + \phi - \psi$ où ϕ contient ε_1 et ε_2 et ψ ne contient ni l'un ni l'autre. Par conséquent $C_{s_0 \cdot \gamma}$ est non nul seulement si $\beta_1 + \beta_2 = p - 2n$ et le diagramme gauche $\beta \rightarrow \gamma + \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ a exactement deux boîtes sur la première ligne et deux sur la seconde (ce qui revient à dire que le diagramme gauche $\beta \rightarrow \gamma$ a exactement une boîte sur la première ligne et une sur la seconde). Supposons donc que $\beta_1 + \beta_2 = p - 2n$ et que $\beta \rightarrow \gamma + \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ a deux boîtes sur la première ligne et deux boîtes sur la seconde ligne. Il reste à traduire la différence $C_\gamma - C_{\gamma + \varepsilon_1 + \varepsilon_2}$ en termes de diagrammes gauches sur $\beta \rightarrow \gamma$. Pour cela, on construit une injection de l'ensemble des pseudo-GL(2)-tableaux gauches de forme $\beta \rightarrow \gamma + \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ et de poids $n - l$ dans l'ensemble des pseudo-GL(2)-tableaux gauches de forme $\beta \rightarrow \gamma$ et de poids $n - l$. Comme p est différent de 2 (puisque $p \geq 2n$ d'après le corollaire 3.23), on a $\beta_1 \neq \beta_2$, ce qui permet de définir une injection Γ de la manière suivante. Soit T un pseudo-GL(2)-tableau gauche de forme $\beta \rightarrow \gamma + \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ et de poids $n - l$. On supprime la boîte qui porte le numéro 2 sur la première ligne et on remplace le numéro 1 par le numéro 2 dans la boîte restante sur cette première ligne. Puis on supprime la boîte qui porte le numéro 2 sur la seconde ligne, et on obtient ainsi $\Gamma(T)$. L'image de Γ est l'ensemble des pseudo-GL(2)-tableaux gauches de forme $\beta \rightarrow \gamma$ et de poids $n - l$ tels que la boîte sur la première ligne porte le numéro 2 et la boîte sur la seconde ligne porte le numéro 1.

Si $G_2 = \mathrm{Spin}(2n + 1)$, $2\beta_1 = p - 2n$ et $\beta \rightarrow \gamma + \varepsilon_1$ a deux boîtes sur la première ligne, on cherche à calculer $C_\gamma - C_{\gamma + \varepsilon_1}$ de la même manière. Remarquons que dans cette soustraction on est dans l'une des deux situations suivantes : tous les tableaux sur $\beta \rightarrow \gamma$ sont de poids $n - l$ et tous les tableaux sur $\beta \rightarrow \gamma + \varepsilon_1$ sont de poids $n - l + 1$, ou tous les tableaux sur $\beta \rightarrow \gamma$ sont de poids $n - l + 1$ et tous les tableaux

CHAPITRE 6. CARACTÈRES EN CARACTÉRISTIQUE P

sur $\beta \rightarrow \gamma + \varepsilon_1$ sont de poids $n - l$. Soit T un pseudo-GL(2)-tableau gauche de forme $\beta \rightarrow \gamma + \varepsilon_1$. On sait qu'on a un 1 et un 2 sur la première ligne. Dans le premier cas, c'est-à-dire si T est de poids $n - l + 1$, on définit l'injection Γ en supprimant la boîte contenant le numéro 2 sur la première ligne. Le second cas est plus délicat. Considérons la colonne C contenant le 1 de la première ligne. On supprime la boîte portant le numéro 2 sur la première ligne et le dernier 1 de la colonne C est remplacé par un 2, ce qui donne $\Gamma(T)$. Dans cette situation, l'image de Γ est l'ensemble des pseudo-GL(2)-tableaux gauches de forme $\beta \rightarrow \gamma$ et de poids $n - l + 1$ tels que la première ligne contient exactement une boîte qu'on note b , et il y a au moins une ligne contenant une unique boîte située dans la colonne de b et portant le numéro 2.

Si $G_2 = \text{Pin}(2n)$, $\beta_1 + \beta_2 = p - 2n + 2$ et $\beta \rightarrow \gamma + \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ a deux boîtes sur la première ligne et deux boîtes sur la seconde ligne, on calcule $C_\gamma - C_{\gamma + \varepsilon_1 + \varepsilon_2}$ de la même manière, en se rappelant que dans cette soustraction tous les tableaux portent un $2\#$ ou aucun d'entre eux (d'après la remarque suivant le corollaire 3.29) : on cherche une injection Γ de l'ensemble des pseudo-GL(2)-tableaux gauches de forme $\beta \rightarrow \gamma + \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ et de poids $n - l$ dans l'ensemble des pseudo-GL(2)-tableaux gauches de forme $\beta \rightarrow \gamma$ et de poids $n - l$, telle que si T porte un $2\#$ (resp. n'en porte pas), c'est aussi le cas pour $\Gamma(T)$. On définit Γ de façon similaire au cas $G_2 = \text{Spin}(2n + 1)$. Soit T un pseudo-GL(2)-tableau gauche de forme $\beta \rightarrow \gamma + \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ et de poids $n - l$. On sait qu'on a un 1 et un 2 sur la première et la seconde ligne. La colonne C contient le 1 de la seconde ligne. On supprime les boîtes portant le numéro 2 sur les deux premières lignes et le dernier 1 de la colonne C est remplacé par un 2 non diésé, ce qui donne $\Gamma(T)$.

Si $G_2 = \text{O}(2n)$, $\beta_1 + \beta_2 = p - 2n + 2$ et $\beta \rightarrow \gamma + \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ a deux boîtes sur la première ligne et deux boîtes sur la seconde ligne, on procède comme suit. On dit que i réalise (*) si $\beta_i = 0$ et le tableau a un 1 et pas de 2 sur la ligne i . La première condition de l'énoncé dit que si $\beta_n = \gamma_n = 0$ et $s = t$, aucun i ne réalise (*), alors que si $\beta_n = \gamma_n = 0$ et $s \neq t$, n réalise (*). Rappelons que $D_{(\gamma, \varepsilon)} = C_{(\gamma, \varepsilon)} - C_{(s_0 \cdot \gamma, \varepsilon)}$ pour $\varepsilon = \pm$. Si $\beta_2 \neq 0$, l'injection Γ utilisée si $G_2 = \text{Sp}(2n)$ convient : on a de nouveau $\beta_1 \neq \beta_2$, et k réalise (*) pour T si et seulement si k réalise (*) pour $\Gamma(T)$. Si $\beta_2 = 0$, on doit prendre garde à la condition (*). On a aussi $\gamma_2 = 0$ et la remarque qui suit la proposition 2.11 montre qu'à partir de la seconde ligne de $\beta \rightarrow \gamma$, il n'y a plus qu'une boîte dans chaque ligne jusqu'à la ligne n , ces boîtes sont dans une même colonne et elles portent toutes le même numéro, 1 si $s \neq t$, 2 sinon. On définit une injection Γ_1 comme suit. S'il existe $k \geq 3$ tel que la ligne k porte le numéro 1, on applique l'injection Γ . Sinon on supprime la boîte portant le numéro 2 sur la première ligne, puis on supprime la boîte portant le numéro 2 sur la seconde ligne, et on met le numéro 2 à la place du 1 dans la boîte restante sur la seconde ligne. On vérifie immédiatement que l'image de cette injection Γ_1 est l'ensemble des tableaux où 1 figure sur la première ligne et pas sur les autres, et ceux où 2 figure sur la première ligne et pas sur les autres. \square

On peut enfin énoncer le théorème général. Soit G l'un des groupes classiques $\text{Sp}(2m)$, $\text{SO}(2m + 1)$, $\text{SO}(2m)$, $\text{Spin}(2m + 1)$, $\text{Spin}(2m)$ et soit $\lambda \in P^+$. On note

6.3. SITUATION GÉNÉRALE

n le nombre de colonnes de $Y(\lambda)$ avec $n \geq 2$ si $G = \mathrm{Sp}(2m)$ ou $\mathrm{Spin}(2m+1)$ et $n \geq 3$ si $G = \mathrm{SO}(2m+1)$ ou $\mathrm{SO}(2m)$. Pour tout $i \leq n$ on désigne par c_i le nombre de boîtes sur la colonne i de Y . Sous certaines conditions sur $Y(\lambda)$, les théorèmes suivants déterminent le caractère de $L(\lambda)$, i.e. $\dim L(\lambda)_\mu$ pour tout $\mu \in P$.

Théorème 6.12 *Soit $G = \mathrm{Sp}(2m)$ et supposons $c_n + c_{n-1} \geq 2(m+n + \frac{1-p}{2}) - 1$. La dimension de $L(\lambda)_\mu$ est le nombre de $\mathrm{Sp}(2m)$ -tableaux T de forme $Y(\lambda)$ et de poids μ tels que*

1. *Pour tout $1 \leq i \leq m$, la somme du nombre de boîtes sur les colonnes n et $n-1$ de $T[2i]$ est $\geq 2i + 2n - p$.*
2. *Si la somme du nombre de boîtes sur les colonnes n et $n-1$ de $T[2i-2]$ est égale à $2i + 2n - 2 - p$, on exclut les tableaux où $2i-1$ figure sur la colonne n , $2i$ n'y figure pas, $2i$ figure sur la colonne $n-1$ et $2i-1$ n'y figure pas.*

Théorème 6.13 *Soit $G = \mathrm{Spin}(2m+1)$ et supposons $c_n \geq m+n + \frac{1-p}{2}$. La dimension de $L(\lambda)_\mu$ est le nombre de $\mathrm{Spin}(2m+1)$ -tableaux T de forme $Y(\lambda)$ et de poids μ tels que*

1. *Pour tout $1 \leq i \leq m$, le nombre de boîtes sur la colonne n de $T[2i]$ est $\geq i + n + \frac{1-p}{2}$.*
2. *Si le nombre de boîtes sur la colonne n de $T[2i-2]$ est égal à $i + n - \frac{p+1}{2}$ il y a deux possibilités : si la $i^{\text{ème}}$ composante du poids de T est $\mu_i - \frac{1}{2}$, on exclut les tableaux où $2i$ figure sur la colonne n et $2i-1$ n'y figure pas. Si la $i^{\text{ème}}$ composante du poids de T est $\mu_i + \frac{1}{2}$, on exclut les tableaux tels que la colonne n porte exactement l'un des deux numéros $2i$ ou $2i-1$, situé sur une ligne k , et il existe une colonne qui ne porte pas le numéro $2i$ et qui porte le numéro $2i-1$ sur la ligne k .*

Théorème 6.14 *Soit $G = \mathrm{Spin}(2m)$ et supposons $c_n \geq m+n + \frac{1-p}{2}$. La dimension de $L(\lambda)_\mu$ est le nombre de $\mathrm{Spin}(2m)$ -tableaux T de forme $Y(\lambda)$ et de poids μ tels que pour tout $1 \leq i \leq m$, le nombre de boîtes sur la colonne n de $T[2i]$ est $\geq i + n + \frac{1-p}{2}$.*

Théorème 6.15 *Soit $G = \mathrm{SO}(2m+1)$ et supposons $c_n + c_{n-1} \geq 2(m+n + \frac{1-p}{2}) - 2$. La dimension de $L(\lambda)_\mu$ est le nombre de $\mathrm{SO}(2m+1)$ -tableaux T de forme $Y(\lambda)$ et de poids μ tels que*

1. *Pour tout $1 \leq i \leq m$, la somme du nombre de boîtes sur les colonnes n et $n-1$ de $T[2i]$ est $\geq 2i + 2n - 1 - p$.*
2. *Si le nombre de boîtes sur les colonnes n et $n-1$ de $T[2i-2]$ est égal à $2i + 2n - 3 - p$, on exclut les tableaux où $2i$ figure sur la colonne n , $2i-1$ n'y figure pas, la colonne $(n-1)$ porte exactement l'un des deux numéros $2i$ ou $2i-1$, situé sur une ligne k , et il existe une colonne, distincte de la première colonne, qui ne porte pas le numéro $2i$ et qui porte le numéro $2i-1$ sur la ligne k .*

CHAPITRE 6. CARACTÈRES EN CARACTÉRISTIQUE P

Théorème 6.16 *Soit $G = \mathrm{SO}(2m)$ et supposons $c_n + c_{n-1} \geq 2(m + n + \frac{p-1}{2}) - 3$. La dimension de $L(\lambda)_\mu$ est le nombre de $\mathrm{SO}(2m)$ -tableaux T de forme $Y(\lambda)$ et de poids μ tels que*

1. *Pour tout $1 \leq i \leq m$, la somme du nombre de boîtes sur les colonnes n et $n - 1$ de $T[2i]$ est $\geq 2i + 2n - 2 - p$.*
2. *Si la somme du nombre de boîtes sur les colonnes n et $n - 1$ de $T[2i - 2]$ est égale à $2i + 2n - 4 - p$, il y a deux possibilités : Si on a exactement $i - 1$ boîtes sur la colonne $n - 1$ de numéro $\leq 2i - 2$, on exclut les tableaux tels que $2i$ ne figure pas sur la colonne n mais figure sur toutes les autres, et ceux tels que $2i - 1$ ne figure pas sur la colonne n mais figure sur toutes les autres. Si on a strictement moins de $i - 1$ boîtes sur la colonne $n - 1$ de numéro $\leq 2i - 2$, on exclut les tableaux où $2i - 1$ figure sur la colonne n , $2i$ n'y figure pas, $2i$ figure sur la colonne $n - 1$ et $2i - 1$ n'y figure pas.*

Démonstration. Si $G = \mathrm{Sp}(2m)$ ou $\mathrm{SO}(2m)$, la formule découle immédiatement de la correspondance de 5.2 et du lemme ci-avant.

Si $G = \mathrm{Spin}(2m)$, on applique la correspondance de 5.2 et l'inégalité $(\gamma + \rho)(h_0) \leq p - 2$ pour le groupe $\mathrm{O}(2n + 1)$, dont on a vu qu'elle équivaut à $(\gamma + \rho)(h_0) \leq p - 1$ puisque $(\gamma + \rho)(h_0) = 2\gamma_1 + 2n - 1$ est impair.

Si $G = \mathrm{SO}(2m + 1)$, il faut modifier un peu l'énoncé "la seconde ligne de $\psi(T)[2i] \setminus \psi(T)[2i - 2]$ contient exactement une boîte qu'on note b , et il y a au moins une ligne, distincte de la ligne n , contenant une unique boîte située dans la colonne de b et portant le numéro $2i$ " qu'on trouve à partir du lemme précédant le théorème. Il est clair que cette condition se reformule en "la seconde ligne de $\psi(T)$ contient exactement q boîtes de numéro $\leq 2i$, elle porte exactement l'un des deux numéros $2i$ ou $2i - 1$, et il y a au moins une ligne, distincte de la ligne n , qui contient exactement q boîtes de numéro $\leq 2i$, qui ne porte pas le numéro $2i - 1$ et qui porte le numéro $2i$ ". On en déduit la condition du théorème.

On trouve de même la formule pour $\mathrm{Spin}(2m + 1)$. □

On voit que p peut prendre des valeurs inférieures au nombre de Coxeter de G , on obtient donc des formules dont le domaine de validité est très différent de celui de la conjecture de Lusztig. On constate également que les formules des théorèmes ci-dessus sont stables au sens suivant. Soit $G = \mathrm{Sp}(2m)$ par exemple et soit $\lambda \in P^+$ satisfaisant les hypothèses de 6.1, 6.3 ou 6.12. Si on place une ligne de n boîtes avant la première ligne de $Y(\lambda)$, on obtient un nouveau diagramme pour $\mathrm{Sp}(2m + 2)$ qui vérifie toujours les hypothèses de 6.1, 6.3 ou 6.12. Cette notion de stabilité apparaît aussi au chapitre suivant. On y montre par exemple que pour p et $e \geq d \geq 0$ fixés, la série génératrice des dimensions des $\mathrm{SO}(2(n + d))$ -modules simples de plus haut poids $\omega_n + \omega_{n+d-e}$ est rationnelle, et on en déduit le comportement asymptotique de ces dimensions quand n tend vers l'infini.

Remarquons enfin que si $\lambda \in P^+$ satisfait les conditions des théorèmes précédents, le nombre de colonnes de $Y(\lambda)$ n'excède pas $\frac{p+1}{2}$. Plus précisément on trouve

6.3. SITUATION GÉNÉRALE

$2n \leq p$ si $G = \mathrm{Sp}(2m)$, $2n + 1 \leq p$ si $G = \mathrm{Spin}(2m)$ ou $\mathrm{Spin}(2m + 1)$ et $2n - 1 \leq p$ si $G = \mathrm{SO}(2m)$ ou $\mathrm{SO}(2m + 1)$ (autrement dit l'alcôve fondamentale du groupe auxiliaire G_2 est non vide). On en déduit facilement que λ est restreint ou égal à l'un des poids $p\omega_+$, $(p + 1)\omega_+$ ou $p\omega_+ + \omega_-$ (et si λ est égal à l'un de ces trois derniers poids, il est évidemment plus simple d'utiliser le théorème de Steinberg pour déterminer le caractère de $L(\lambda)$).

Exemple 6.17 Soit $G = \mathrm{Sp}(2m)$. Si $p \geq 3$ et $0 \leq s \leq \frac{p-1}{2}$, le théorème précédent associé au théorème 6.1 fournit le caractère de $L(s\omega_m)$, et le théorème de Steinberg permet d'en déduire le caractère de $L((\sum s_i p^i)\omega_m)$, avec $0 \leq s_i \leq \frac{p-1}{2}$ pour tout i .

Si $p = 2$, on a déjà vu que le théorème 6.1 donne une description très simple de $\mathrm{ch} L(\omega_m)$, et on en déduit de même $\mathrm{ch} L(s\omega_m)$ pour tout s . On a en particulier $\dim L(s\omega_m) = 2^{mr}$, où r est le nombre de 1 dans l'écriture 2-adique de s .

CHAPITRE 6. CARACTÈRES EN CARACTÉRISTIQUE P

Chapitre 7

Modules simples de plus haut poids

ω_i ou $\omega_i + \omega_j$

Soit G l'un des groupes classiques $\mathrm{Sp}(2m)$, $\mathrm{SO}(2m+1)$, $\mathrm{SO}(2m)$, $\mathrm{Spin}(2m+1)$, $\mathrm{Spin}(2m)$. On s'intéresse dans ce chapitre aux $\mathrm{Sp}(2m)$ -modules simples de plus haut poids un poids fondamental, aux $\mathrm{SO}(2m+1)$ -modules et $\mathrm{SO}(2m)$ -modules de plus haut poids une somme de deux poids fondamentaux, et aux $\mathrm{Spin}(2m+1)$ -modules et $\mathrm{Spin}(2m)$ -modules de plus haut poids la somme d'un poids fondamental et du poids fondamental ω_+ . On cherche notamment à calculer leur dimension ou leur caractère. Dans ce cadre, on obtient des résultats beaucoup plus précis que dans le cas général : pour les choix $n = 1$ ou $n = 2$, les paires duales font intervenir $\mathrm{SL}(2)$ ou $\mathrm{SL}(2) \times \mathrm{SL}(2)$, groupes dont on connaît tous les modules basculants.

Les séries génératrices des dimensions sont l'outil privilégié de ce chapitre. On commence par montrer que sous une certaine condition, les séries considérées sont rationnelles à pôles réels simples, et on détermine ces pôles. Puis on étudie un produit de convolution entre séries formelles, et on consacre plusieurs pages à une certaine série génératrice relative aux modules basculants de $\mathrm{SL}(2)$, série considérée par Karin Erdmann dans [14]. Ces deux outils nous permettent de calculer les séries génératrices, autrement dit les dimensions des modules simples, cette fois sans aucune restriction, et on montre comment en déduire également les caractères des représentations lorsque $G = \mathrm{Sp}(2m)$, $\mathrm{Spin}(2m)$ ou $\mathrm{Spin}(2m+1)$. On se restreint ensuite provisoirement au cas où G est un groupe symplectique ou un groupe spin. On exprime alors la dimension des modules simples de trois façons différentes : comme coefficients de séries entières simples, comme une somme alternée de dimensions de modules de Weyl (résultat qui est amélioré au chapitre suivant), et enfin comme sommes "périodiques" de coefficients binômiaux. Puis on revient à nos cinq groupes classiques, pour lesquels on donne la dimension des modules simples par une formule faisant intervenir les fonctions trigonométriques. De cette formule, on déduit finalement les équivalents des dimensions des modules simples lorsque m tend vers l'infini à p fixé.

Remarquons que le chapitre suivant est en fait un prolongement de celui-ci aux

modules de Weyl. Notons également que les formules que nous obtenons permettent de réaliser des calculs effectifs rapides, même pour de grandes valeurs des différents paramètres.

7.1 Approche qualitative

On considère les familles de groupes $(\mathrm{Sp}(2q))_{q \geq 1}$, $(\mathrm{Spin}(2q+1))_{q \geq 1}$, $(\mathrm{Spin}(2q))_{q \geq 1}$, $(\mathrm{SO}(2q+1))_{q \geq 1}$ et $(\mathrm{SO}(2q))_{q \geq 1}$. A chacune de ces familles \mathcal{F} , on associe une série formelle dépendant d'un ou deux paramètres. Pour cela, on note $L_q(\lambda)$ la représentation irréductible de plus haut poids λ pour $\mathrm{Sp}(2q)$, $\mathrm{Spin}(2q+1)$, $\mathrm{Spin}(2q)$, $\mathrm{SO}(2q+1)$ ou $\mathrm{SO}(2q)$ suivant la famille considérée, on pose $\Omega_i = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_i$ pour tout $i \geq 0$ et on convient que $\omega_0 = \Omega_0 = 0$. On définit les séries formelles suivantes pour tous $d \geq 0$, ou pour tous $d \geq e \geq 0$.

$$\begin{aligned} \chi_d(z) &= \sum_{n \geq 0} \dim L_{d+n}(\omega_n) z^n \text{ si } \mathcal{F} = (\mathrm{Sp}(2q))_{q \geq 1}, \\ \chi_d(z) &= \sum_{n \geq 0} \dim L_{d+n}(\omega_+ + \Omega_n) z^n \text{ si } \mathcal{F} = (\mathrm{Spin}(2q+1))_{q \geq 1} \text{ ou } \mathcal{F} = (\mathrm{Spin}(2q))_{q \geq 1}, \\ \chi_{d,e}(z) &= \sum_{n \geq 0} \dim L_{d+n}(\Omega_n + \Omega_{n+d-e}) z^n \text{ si } \mathcal{F} = (\mathrm{SO}(2q+1))_{q \geq 1} \text{ ou } \mathcal{F} = (\mathrm{SO}(2q))_{q \geq 1}. \end{aligned}$$

On écrit $\chi(z)$ pour abrégier s'il n'y a pas d'ambiguïté sur la famille \mathcal{F} , et donc sur les paramètres.

Rappelons quelques isomorphismes classiques. On a $\mathrm{Sp}(2) \simeq \mathrm{Spin}(3) \simeq \mathrm{SL}(2)$, et on identifie le poids fondamental de $\mathrm{Sp}(2)$ et celui de $\mathrm{Spin}(3)$ au poids 1 de $\mathrm{SL}(2)$. Le groupe $\mathrm{SO}(3)$ est le quotient de $\mathrm{Spin}(3) \simeq \mathrm{SL}(2)$ par $\{\pm 1\}$, et sous l'identification précédente le poids $j\varepsilon_1$ de $\mathrm{SO}(3)$ correspond au poids $2j$ de $\mathrm{SL}(2)$. Sous l'isomorphisme $\mathrm{Spin}(4) \simeq \mathrm{SL}(2) \times \mathrm{SL}(2)$, le poids $a\varepsilon_1 + b\varepsilon_2$ de $\mathrm{Spin}(4)$ correspond au poids $(a-b, a+b)$ de $\mathrm{SL}(2) \times \mathrm{SL}(2)$, et $\mathrm{SO}(4)$ est le quotient de $\mathrm{Spin}(4) \simeq \mathrm{SL}(2) \times \mathrm{SL}(2)$ par $\{(1, 1), (-1, -1)\}$.

Signalons enfin le résultat utile suivant, qui est (par exemple) une conséquence du lemme 3.17.

Lemme 7.1 *Sous $\mathrm{SL}(2)$ on a pour tout p impair $\Delta(1) \otimes \Delta(1) = \Delta(2) \oplus 1$.*

On rappelle ici un théorème de Mathieu [38]. Soit G un groupe algébrique simple connexe et simplement connexe sur $\overline{\mathbb{F}_p}$, on note $G_{\mathbb{C}}$ le groupe simple connexe et simplement connexe de même diagramme de Dynkin défini sur \mathbb{C} . Soient M, N deux G -modules, soit $\beta \in P^+$ et notons $C = \mathrm{End}_G(M)$. On fait agir trivialement C sur N , et ainsi, avec les notations de 4.4, $T_{\beta}(M \otimes N^{\otimes n})$ est un C -module. Pour tout C -module U , on note $[U]$ son image dans le groupe de Grothendieck $K_0(C)$, et on définit la série formelle $S_{\beta}(z)$ à valeurs dans $K_0(C)$ par $S_{\beta}(z) = \sum_{n \geq 0} [T_{\beta}(M \otimes N^{\otimes n})] z^n$. On pose

$$Z(N) = \{x \in \mathbb{C} \mid \text{il existe un élément régulier } g \text{ de } G_{\mathbb{C}} \text{ tel que } g^p \text{ soit central et } x = (\mathrm{ch} N)(g)\}.$$

7.1. APPROCHE QUALITATIVE

Théorème 7.2 ([38], théorème 11.4) Soit $\beta \in C^0$. Alors $S_\beta(z)$ est une fraction rationnelle à pôles simples, plus précisément $S_\beta(z) = \sum_{x \in Z(N)} \frac{a_x}{1-xz}$ pour certains a_x dans $\mathbb{C} \otimes K_0(C)$.

On en déduit un premier résultat qualitatif qu'on va généraliser par une approche différente au paragraphe 7.4.

Proposition 7.3 1. Si $\mathcal{F} = (\mathrm{Sp}(2q))_{q \geq 1}$, on suppose $d \leq p - 2$.

2. Si $\mathcal{F} = \mathrm{Spin}(2q + 1)_{q \geq 1}$ ou $\mathcal{F} = \mathrm{Spin}(2q)_{q \geq 1}$, on suppose $d \leq \frac{p-3}{2}$.

3. Si $\mathcal{F} = \mathrm{SO}(2q + 1)_{q \geq 1}$, on suppose $d + e \leq p - 3$.

4. Si $\mathcal{F} = \mathrm{SO}(2q)_{q \geq 1}$, on suppose $d + e \leq p - 2$.

Alors $\chi(z)$ est une fraction rationnelle à pôles simples, et si Z désigne l'ensemble des inverses des pôles, on a

1. $Z = \{4 \cos^2(\frac{\pi j}{2p}) | 1 \leq j \leq p\}$ si $\mathcal{F} = (\mathrm{Sp}(2q))_{q \geq 1}$.

2. $Z = \{8 \cos^2(\frac{\pi j}{p}) | 1 \leq j \leq p\}$ si $\mathcal{F} = \mathrm{Spin}(2q + 1)_{q \geq 1}$ ou $\mathcal{F} = \mathrm{Spin}(2q)_{q \geq 1}$.

3. $Z = \{16 \cos^2(\frac{(j-h)\pi}{2p}) \cos^2(\frac{(j+h)\pi}{2p}) | 1 \leq j \leq 2p - 1, 1 \leq h \leq 2p - 1, j \neq p, h \neq p\}$ si $\mathcal{F} = \mathrm{SO}(2q + 1)_{q \geq 1}$ ou $\mathcal{F} = \mathrm{SO}(2q)_{q \geq 1}$,

Démonstration. Signalons tout d'abord qu'on appliquera ci-dessous le premier point de la proposition 4.11 à la $(\mathrm{Pin}(2d), \mathrm{SO}(3))$ paire duale et à la $(\mathrm{O}(2d + 1), \mathrm{Spin}(4))$ paire duale, qui ne font pas partie des cinq paires duales qu'on manipule ordinairement, mais qui s'en déduisent (voir la remarque suivant le théorème 4.3). On vérifie immédiatement que ce point reste valable pour ces deux paires duales.

1. Soit $\mathcal{F} = (\mathrm{Sp}(2q))_{q \geq 1}$. Avec les notations du théorème 7.2, soient $G = \mathrm{Sp}(2) \simeq \mathrm{SL}(2)$ et $\beta = d \in C^0$. On pose $M = (\Lambda V_2)^{\otimes d}$ et $N = \Lambda V_2 = 2 \oplus V_2$. Le module M s'identifie à la $(\mathrm{Sp}(2d), \mathrm{Sp}(2))$ paire duale \mathbb{M} et le commutant C du G -module \mathbb{M} est engendré par l'action de $\mathrm{Sp}(2d)$ sur \mathbb{M} .

On détermine facilement $Z = Z(N)$: tout élément régulier $g \in G_{\mathbb{C}}$ tel que g^p est central est conjugué à une matrice $\begin{bmatrix} \xi & 0 \\ 0 & \xi^{-1} \end{bmatrix}$, avec $\xi \neq \pm 1$ et $\xi^{2p} = 1$. On trouve alors $(\mathrm{ch} N)(g) = 2 + \xi + \xi^{-1} = 2(1 + \cos(\frac{\pi j}{p})) = 4 \cos^2(\frac{\pi j}{2p})$ avec p qui ne divise pas j .

On veut identifier $[T_d(M \otimes N^{\otimes n})]$. On considère pour cela la $(\mathrm{Sp}(2d + 2n), \mathrm{Sp}(2))$ paire duale étudiée au chapitre 4, notée \mathbb{M}_{d+n} , et sous cette paire duale on considère les poids $\lambda = \omega_n$ de $\mathrm{Sp}(2d + 2n)$ et $\tilde{\lambda} = d$ de $\mathrm{Sp}(2)$. On sait que $T_{\tilde{\lambda}}(\mathbb{M}_{d+n}) = L_{d+n}(\lambda) = L_{d+n}(\omega_n)$ comme $\mathrm{Sp}(2d + 2n)$ -module. De plus on a $\mathbb{M}_{d+n} = M \otimes N^{\otimes n}$ comme G -module et comme C -module :

- (a) Comme G -module on a $M \otimes N^{\otimes n} = (\Lambda V_2)^{\otimes (d+n)} = \Lambda(V_2 \otimes \mathbb{C}^{d+n}) = \mathbb{M}_{d+n}$.
- (b) Comme C -module d'après le lemme 4.6, où on prend pour U_k la représentation naturelle de $\mathrm{Sp}(2d)$, via l'inclusion naturelle de $\mathrm{Sp}(2d)$ dans $\mathrm{Sp}(2d + 2n)$.

CHAPITRE 7. MODULES SIMPLES DE PLUS HAUT POIDS ω_I OU $\omega_I + \omega_J$

Par conséquent $T_{\tilde{\lambda}}(M \otimes N^{\otimes n}) = T_{\tilde{\lambda}}(\mathbb{M}_{d+n}) = L_{d+n}(\lambda)$ comme C -module. Il ne reste plus qu'à appliquer l'opérateur linéaire $\Theta : \mathbb{C} \otimes K_0(C) \rightarrow \mathbb{C}$ défini par $\Theta(X) = \dim X$ pour obtenir le résultat annoncé pour $\chi_d(z) = \Theta(S_d(z))$.

2. Soit $\mathcal{F} = (\text{Spin}(2q+1))_{q \geq 1}$. On procède de la même manière. On pose $G = \text{Spin}(3) \simeq \text{SL}(2)$, $\beta = 2d+1 \in C^0$, $M = (\Lambda V_2)^{\otimes d} \otimes \Lambda V_{2-}$, $N = \Lambda V_2 = 2(1 \oplus V_2) = 2(1 \oplus \Delta(2)) = 2\Delta(1)^{\otimes 2}$ d'après 7.1 et le G -module M s'identifie à la $(\text{Spin}(2d+1), \text{Spin}(3))$ paire duale \mathbb{M} . La suite est identique à ce qui précède. Avec les mêmes notations qu'auparavant, on a $(\text{ch } N)(g) = 2(2 + \xi^2 + \xi^{-2}) = 4(1 + \cos(\frac{2\pi j}{p})) = 8 \cos^2(\frac{\pi j}{p})$ et p ne divise pas j .
3. Soit $\mathcal{F} = (\text{Spin}(2q))_{q \geq 1}$. Le théorème 7.2 ne s'applique qu'aux groupes connexes, mais la $(\text{Spin}(2d), \text{O}(3))$ paire duale \mathbb{M} est aussi une $(\text{Pin}(2d), \text{SO}(3))$ paire duale (cf. [2]). On a

$$\chi_d(z) = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 0} \dim L_{d+n}(\omega_+ + \Omega_n, 0) z^n$$

où $L_{d+n}(\mu, 0)$ est la représentation irréductible de $\text{Pin}(2d+2n)$ de plus haut poids μ . On considère le poids $\beta = 2d$ de $\text{SL}(2)$, et ce qui vient d'être fait pour $\mathcal{F} = (\text{Spin}(2q+1))_{q \geq 1}$ reste vrai sans modification.

4. Soit $\mathcal{F} = (\text{SO}(2q+1))_{q \geq 1}$. La $(\text{SO}(2d+1), \text{Pin}(4))$ paire duale \mathbb{M} est aussi une $(\text{O}(2d+1), \text{Spin}(4))$ paire duale (cf. [2]). On a évidemment

$$\chi_{d,e}(z) = \sum_{n \geq 0} \dim L_{d+n}(\Omega_n + \Omega_{n+d-e}, +) z^n$$

où $L_{d+n}(\lambda, +)$ est la représentation irréductible de $\text{O}(2d+2n+1)$ de plus haut poids $(\lambda, +)$. On poursuit alors de la même manière. On pose $G = \text{Spin}(4)$, $\beta = (d + \frac{1}{2})\varepsilon_1 + (e + \frac{1}{2})\varepsilon_2 \in C^0$, $M = \mathbb{M}$ est la $(\text{O}(2d+1), \text{Spin}(4))$ paire duale, $N = \Lambda V_2 = 2 \oplus 2V_2 \oplus \Lambda^2 V_2 = 2 \oplus 2\Delta(\varepsilon_1) \oplus \Delta(2\omega_+) \oplus \Delta(2\omega_-)$.

Il reste à déterminer Z , ce qu'on fait en identifiant $\text{Spin}(4)$ avec $\text{SL}_2 \times \text{SL}_2$. On a alors $N = 2\mathbb{1} \boxtimes \mathbb{1} \oplus 2\Delta(1) \boxtimes \Delta(1) \oplus \mathbb{1} \boxtimes \Delta(2) \oplus \Delta(2) \boxtimes \mathbb{1} = (\Delta(1) \boxtimes \mathbb{1} \oplus \mathbb{1} \boxtimes \Delta(1))^{\otimes 2}$. On considère un couple (a, b) d'éléments réguliers de SL_2 dont la puissance $p^{\text{ème}}$ est centrale :

$$a = \begin{bmatrix} \xi & 0 \\ 0 & \xi^{-1} \end{bmatrix}, \xi \neq \pm 1, \xi^{2p} = 1 \text{ et } b = \begin{bmatrix} \eta & 0 \\ 0 & \eta^{-1} \end{bmatrix}, \eta \neq \pm 1, \eta^{2p} = 1.$$

On a $\xi = \exp \frac{i\pi j}{p}$, $\eta = \exp \frac{i\pi h}{p}$ et p ne divise ni h ni j . On trouve $(\text{ch } N)(a, b) = (\xi + \xi^{-1} + \eta + \eta^{-1})^2 = 4(\cos(\frac{j\pi}{p}) + \cos(\frac{h\pi}{p}))^2 = 16 \cos^2(\frac{(j-h)\pi}{2p}) \cos^2(\frac{(j+h)\pi}{2p})$.

5. Soit $\mathcal{F} = (\text{SO}(2q))_{q \geq 1}$. On applique la même idée, en considérant \mathbb{M} comme une $(\text{O}(2d), \text{SO}(4))$ paire duale plutôt qu'une $(\text{SO}(2d), \text{O}(4))$ paire duale. On a alors, si $e \neq 0$, $\chi_{d,e}(z) = \sum_{n \geq 0} \dim L_{d+n}(\Omega_n + \Omega_{n+d-e}, +) z^n$ et si $e = 0$, on a $\chi_{d,e}(z) = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 0} \dim L_{d+n}(\Omega_n + \Omega_{n+d-e}, 0) z^n$. On pose $\beta = d\varepsilon_1 + e\varepsilon_2$, et le calcul de Z est exactement identique au cas précédent.

□

7.2 Convolution binômiale

On définit un produit de convolution entre séries formelles, produit qui intervient dans le théorème 7.18 et qui réduit l'étude de $\chi(z)$ à une certaine série $D_d(z)$.

Définition 7.4 Pour tous $A = \sum_{n \geq 0} a_n z^n, B = \sum_{n \geq 0} b_n z^n \in \mathbb{C}[[z]]$ on définit le produit de convolution $A * B = \sum_{n \geq 0} (\sum_{k=0}^n C_n^k a_k b_{n-k}) z^n$. On définit aussi l'application linéaire $\theta : \mathbb{C}[[z]] \rightarrow \mathbb{C}[[z]]$ qui envoie $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ sur $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n!} z^n$.

Cette convolution est clairement commutative et associative, d'élément neutre 1, et θ est un isomorphisme d'algèbres de $(\mathbb{C}[[z]], +, *)$ sur $(\mathbb{C}[[z]], +, \cdot)$. Comme on a $\theta(\frac{1}{1-az}) = \exp(az)$ et $\exp(az) \exp(bz) = \exp((a+b)z)$, il vient une première formule : $\frac{1}{1-az} * \frac{1}{1-bz} = \frac{1}{1-(a+b)z}$. La proposition qui suit, apparemment nouvelle, généralise cette formule, puisqu'elle décrit l'effet de la convolution par $\frac{1}{1-az}$ pour tout $a \in \mathbb{C}$. On donne deux démonstrations de cette proposition, la seconde étant due à Wolfgang Soergel. Notons que la première de ces démonstrations montre que la proposition reste valable si on remplace \mathbb{C} par un anneau commutatif quelconque.

Proposition 7.5 Soit $a \in \mathbb{C}$. Pour tout $P(z) \in \mathbb{C}[[z]]$ on a

$$\frac{1}{1-az} * P(z) = \frac{1}{1-az} P\left(\frac{z}{1-az}\right),$$

en particulier $\frac{1}{1-az} * \frac{1}{1-bz} = \frac{1}{1-(a+b)z}$ et $\frac{1}{(1-az)^{k+1}} = \frac{1}{1-az} * (1+az)^k$.

Démonstration 1 Remarquons que la composition $P(\frac{z}{1-az})$ a un sens puisque la famille $((\frac{z}{1-az})^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable. Soit (z) l'idéal engendré par z dans $\mathbb{C}[[z]]$. L'idée est de démontrer la proposition lorsque $P(z)$ est un polynôme, puis d'étendre le résultat par densité, $\mathbb{C}[[z]]$ étant muni de la topologie (z) -adique.

Soit $\psi : \mathbb{C}[[z]] \rightarrow \mathbb{C}[[z]]$ l'opérateur linéaire défini par

$$\psi\left(\sum_{n \geq 0} b_n z^n\right) = \frac{1}{1-az} * \left(\sum_{n \geq 0} b_n z^n\right) = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b_k\right) z^n.$$

Si $S(z) = \sum_{n \geq 0} b_n z^n$ et $b_{-1} = 0$, on a

$$\begin{aligned} \psi(zS) &= \sum_{n \geq 1} \left(\sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b_{k-1}\right) z^n \\ &= \sum_{n \geq 1} \left(\sum_{k=1}^n C_{n-1}^{k-1} a^{n-k} b_{k-1}\right) z^n + \sum_{n \geq 1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k a^{n-k} b_{k-1}\right) z^n \\ &= z \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} a^{n+1-k} b_{k-1}\right) z^n + az \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b_{k-1}\right) z^n \\ &= z \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b_k\right) z^n + az \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b_{k-1}\right) z^n \\ &= z\psi(S) + az\psi(zS), \end{aligned}$$

donc $(1 - az)\psi(zS) = z\psi(S)$ et $\psi(zS) = \frac{z}{1-az}\psi(S)$. On en déduit $\psi(RS) = R(\frac{z}{1-az})\psi(S)$ pour $R \in \mathbb{C}[z], S \in \mathbb{C}[[z]]$, d'où $\psi(R) = R(\frac{z}{1-az})\psi(1) = R(\frac{z}{1-az})\frac{1}{1-az}$. La proposition est donc démontrée pour les polynômes.

Pour tout entier positif n , l'idéal $(z)^n = (z^n)$ est aussi un idéal de $(\mathbb{C}[[z]], +, *)$. La convolution est donc une opération continue pour la topologie (z) -adique, et comme les polynômes sont denses dans $\mathbb{C}[[z]]$, on a le résultat. \square

Démonstration 2 On démontre ici la formule pour un sous-espace vectoriel V de $\mathbb{C}[[z]]$ dense pour la topologie (z) -adique, et on conclut comme dans la première démonstration. Le sous-espace V est engendré par la famille $(\frac{1}{1-bz})_{b \in \mathbb{C}}$, et sa densité est claire, comme on le voit en considérant le déterminant de Vandermonde. On est donc réduit à démontrer la formule $\frac{1}{1-az} * \frac{1}{1-bz} = \frac{1}{1-az} \frac{1}{1-b\frac{z}{1-az}}$, c'est-à-dire $\frac{1}{1-az} * \frac{1}{1-bz} = \frac{1}{1-(a+b)z}$, et cette égalité a été établie juste après la définition du produit de convolution. \square

Cette proposition permet de calculer facilement le produit de convolution de deux fractions rationnelles F_1, F_2 dont 0 n'est pas un pôle. En effet par linéarité on se réduit à calculer $\frac{1}{(1-az)^{k+1}} * \frac{1}{(1-bz)^{l+1}} = \frac{1}{1-az} * (1 + az)^k * \frac{1}{1-bz} * (1 + bz)^l = \frac{1}{1-(a+b)z} * P(z) = \frac{1}{1-(a+b)z} P(\frac{z}{1-(a+b)z})$ où P est un polynôme de degré $k + l$. En particulier les pôles de $F_1 * F_2$ sont de la forme $\frac{1}{a+b}$, où a (resp. b) est l'inverse d'un pôle de F_1 (resp. F_2), de multiplicité strictement inférieure à la somme des multiplicités de $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$.

Définition 7.6 Soit $S(z) = \sum s_n z^n \in \mathbb{C}[[z]]$. La partie paire (resp. impaire) de $S(z)$ est $\sum s_{2n} z^{2n} = \frac{1}{2}(S(z) + S(-z))$ (resp. $\sum s_{2n+1} z^{2n+1} = \frac{1}{2}(S(z) - S(-z))$), et S coïncide avec sa partie paire (resp. impaire) si et seulement si $S(-z) = S(z)$ (resp. $S(-z) = -S(z)$), auquel cas on dit que S est paire (resp. impaire).

A l'aide de l'isomorphisme d'algèbres θ , on voit que si S et T sont toutes deux paires ou toutes deux impaires, alors $S * T$ est paire, et si S est paire et T impaire, alors $S * T$ est impaire. Cette remarque servira notamment au cours de la démonstration du théorème 7.18.

7.3 Série génératrice pour $SL(2)$

Dans cette section, on rappelle les propriétés principales d'une certaine série formelle $D_d(z)$, où d est un entier positif, étudiée par Karin Erdmann [14] à l'aide de la connaissance des $SL(2)$ -modules $(T(k))_{k \in \mathbb{N}}$ (cf. 3.18). Cette série est très liée aux différentes séries $\chi(z)$, comme on le verra dans la section suivante. On démontre également quelques résultats nouveaux, notamment la décomposition en éléments simples de $D_d(z)$.

Pour tout $k \geq 0$, on note $T(k)$ le module basculant indécomposable de plus haut poids $k\rho$ de $SL(2)$.

7.3. SÉRIE GÉNÉRATRICE POUR $SL(2)$

Définition 7.7 *Pour tout entier $d \geq 0$, soit $D_d(z) = \sum_{n \geq 0} [T(1)^{\otimes n} : T(d)]z^n$.*

Remarquons que $D_d = z^d + \sum_{n > d} c_{d,n}z^n$. En outre D_d est paire (resp. impaire) si d est pair (resp. impair). Pour le voir, il suffit de remarquer que si deux poids sont dans une même orbite sous l'action de W_{aff} , ils ont la même parité. Par conséquent tous les modules de Weyl intervenant dans une bonne filtration de $T(d)$ ont leur plus haut poids de même parité que d , et finalement tous les poids de $T(d)$ ont même parité que d .

7.3.1 Expression à l'aide des polynômes de Chebyshev

On énonce ici le principal résultat de [14]. Pour tout $k \geq 1$, U_{k-1} désigne le $k^{\text{ème}}$ polynôme de Chebyshev de deuxième espèce défini par $\sin(k\theta) = U_{k-1}(\cos\theta)\sin\theta$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$. Pour tout $k \geq 0$, on note également T_k le $k^{\text{ème}}$ polynôme de Chebyshev de première espèce défini par $\cos(k\theta) = T_k(\cos\theta)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$. On rappelle enfin la définition suivante.

Définition 7.8 *Soit j un entier positif. On appelle décomposition en base p de j l'écriture $j = \sum_{i \geq 0} j_i p^i$, avec $j_i \in \mathbb{N}$ et $0 \leq j_i \leq p-1$ pour tout i .*

Théorème 7.9 [14] *Soit $d \in \mathbb{N}$ et soit $d+1 = \sum_{i=f}^k d_i p^i$ la décomposition en base p de $d+1$ avec $d_f \neq 0$, $d_k \neq 0$. On a*

$$D_d(z) = \frac{1}{z} \prod_{i=f}^k \frac{U_{(p-d_i)p^i-1}\left(\frac{1}{2z}\right)}{U_{p^{i+1}-1}\left(\frac{1}{2z}\right)}.$$

Si $p = 2$ et $d+1 = \sum_{i=1}^k 2^{t_i}$ avec $t_1 < t_2 < \dots < t_k$, cette formule se simplifie en

$$D_d(z) = \frac{1}{z} \prod_{i=1}^k \frac{1}{2T_{2^{t_i}}\left(\frac{1}{2z}\right)}.$$

Il est important de noter que les pôles de $D_d(z)$ sont simples et de la forme $\frac{1}{2 \cos\left(\frac{s\pi}{p^{k+1}}\right)}$ avec $1 \leq s \leq p^{k+1}-1$. En effet, on remarque tout d'abord que si n divise m , alors $U_{n-1}(X)$ divise $U_{m-1}(X)$: si $m = kn$ on a $U_{m-1}(X) = U_{k-1}(T_n(X))U_{n-1}(X)$. Avec les notations du théorème, on a $D_d(z) = \frac{1}{z} \frac{U_{(p-d_f)p^f-1}\left(\frac{1}{2z}\right)}{U_{p^{k+1}-1}\left(\frac{1}{2z}\right)} \prod_{i=f}^{k-1} \frac{U_{(p-d_{i+1})p^{i+1}-1}\left(\frac{1}{2z}\right)}{U_{p^{i+1}-1}\left(\frac{1}{2z}\right)}$, et la remarque précédente montre que $\frac{U_{(p-d_{i+1})p^{i+1}-1}\left(\frac{1}{2z}\right)}{U_{p^{i+1}-1}\left(\frac{1}{2z}\right)}$ est un polynôme en $\frac{1}{z}$, autrement dit une fraction rationnelle dont le seul pôle éventuel est 0. Par ailleurs, pour

tout n , les $n-1$ racines distinctes de $U_{n-1}(x)$ sont les nombres $\cos(\frac{l\pi}{n})$, $1 \leq l \leq n-1$. Comme 0 ne peut pas être un pôle de la série formelle $D_d(z)$, on obtient bien le résultat annoncé.

On peut faire quelques observations supplémentaires. Si $p = 2$ et $d = 0$, $D_d(z)$ n'a pas de pôle puisque $D_d(z) = 1$. Si $p \geq 3$, ou si $p = 2$ et $d \geq 1$, on a $\cos(\frac{\pi}{p^{k+1}}) \neq 0$ et $\frac{1}{2\cos(\frac{\pi}{p^{k+1}})}$ est un pôle de $D_d(z)$ puisqu'il n'annule pas le numé-

rateur $\prod_{i=f}^k U_{(p-d_i)p^i-1}(\frac{1}{2z})$. En considérant les racines des polynômes de Chebyshev intervenant au numérateur et au dénominateur de $D_d(z)$, on voit plus généralement que les pôles de $D_d(z)$ sont les nombres $\frac{1}{2\cos(\frac{s\pi}{p^{i+1}})}$ avec s premier à p , $1 \leq s \leq p^{i+1}-1$ et s différent de $\frac{p^{i+1}}{2}$.

7.3.2 Formules explicites

On conserve les notations du théorème 7.9, et on énonce un autre théorème de [14] qui permet de calculer ponctuellement les coefficients de $D_d(z)$ en transformant, par un changement de variable judicieux (voir par exemple la démonstration du théorème 7.24), la série $D_d(z)$ en une série plus simple à manipuler.

Théorème 7.10 [14] *Le coefficient de z^{d+2r} dans $D_d(z)$ est le coefficient de X^r dans le développement en série entière de $(1-X)(1+X)^{d+2r} \prod_{i=f}^k \frac{X^{(p-d_i)p^i-1}}{X^{p^{i+1}-1}}$.*

Nous déduisons de ce théorème un premier résultat, qui améliore un lemme de [14]. On convient que le coefficient binomial C_n^k est nul si $k < 0$ ou $k > n$.

Proposition 7.11 *Soit $\delta = (p-d_f)p^f$.*

Le coefficient de z^{d+2r} dans $D_d(z)$ est $\sum_{j \in J} (C_{d+2r}^{r-j} - C_{d+2r}^{r-j-1} - C_{d+2r}^{r-j-\delta} + C_{d+2r}^{r-j-\delta-1})$

avec $J = \{j \geq 0 \mid \text{si } j_i \text{ est le coefficient de } p^i \text{ dans la décomposition en base } p \text{ de } j, \text{ on a } j_i = 0 \text{ pour tout } i \leq f \text{ et } j_i + d_i < p \text{ pour tout } i \geq f+1\}$.

Démonstration. Le coefficient de z^{d+2r} dans $D_d(z)$ est le coefficient de X^r dans le développement en série entière de $(1-X)(1+X)^{d+2r} \frac{X^\delta-1}{X^{p^{k+1}-1}} \prod_{i=f}^{k-1} \frac{X^{(p-d_{i+1})p^{i+1}-1}}{X^{p^{i+1}-1}}$. Pour

tout i , le polynôme $X^{p^{i+1}}-1$ divise le polynôme $X^{(p-d_{i+1})p^{i+1}}-1$, et on note $P(X)$ le polynôme $\prod_{i=f}^{k-1} \frac{X^{(p-d_{i+1})p^{i+1}}-1}{X^{p^{i+1}-1}}$. Ce polynôme est à coefficients entiers positifs, et on peut l'expliciter complètement : on a

$$\begin{aligned} \frac{1-X^{(p-d_{i+1})p^{i+1}}}{1-X^{p^{i+1}}} &= \sum_{n \geq 0} X^{np^{i+1}} - \sum_{n \geq 0} X^{p^{i+1}(n+p-d_{i+1})} \\ &= \sum_{0 \leq n < p-d_{i+1}} X^{np^{i+1}}. \end{aligned}$$

7.3. SÉRIE GÉNÉRATRICE POUR $SL(2)$

Le coefficient $c(P, j)$ de X^j dans P est donc le nombre de $(k-f)$ -uplets (n_f, \dots, n_{k-1}) tels que $0 \leq n_i < p - d_{i+1}$ pour tout i et $\sum_{i=f}^{k-1} n_i p^{i+1} = j$. L'unicité de l'écriture de j en base p montre qu'il y a au plus un tel $(k-1)$ -uplet. Ainsi $c(P, j)$ est nul ou égal à 1, et $c(P, j) = 1$ si et seulement si p^{f+1} divise j , $j < p^{k+1}$ et $j_i + d_i < p$ lorsque $f+1 \leq i \leq k$, j_i étant le coefficient de p^i dans la décomposition en base p de j .

Le même argument montre que les coefficients de la série formelle $\frac{P(X)}{1-X^{p^{k+1}}}$ valent 0 ou 1, et le coefficient de X^j est non nul si et seulement si $j \in J$. Comme $(1-X)(1-X^\delta) = 1-X-X^\delta+X^{\delta+1}$ et $(1+X)^{d+2r} = \sum_i C_{d+2r}^i X^i$, on trouve

$$\begin{aligned} (1-X)(1+X)^{d+2r} \frac{1-X^\delta}{1-X^{p^{k+1}}} P(X) &= (1-X-X^\delta+X^{\delta+1}) \sum_i C_{d+2r}^i X^i \sum_{j \in J} X^j \\ &= \sum_{\substack{i \\ j \in J}} (C_{d+2r}^i - C_{d+2r}^{i-1}) X^{i+j} - \sum_{\substack{i \\ j \in J}} (C_{d+2r}^{i-\delta} - C_{d+2r}^{i-\delta-1}) X^{i+j} \end{aligned}$$

d'où la formule voulue. \square

On introduit une notation supplémentaire.

Définition 7.12 On pose $A = \{ \sum_{i=f+1}^k a_i p^i \mid \forall i, 0 \leq a_i \leq p-1-d_i \}$.

Remarquons que $A = \{0\}$ si $f = k$. Avec cette définition, on a le corollaire

Corollaire 7.13 Le coefficient de z^{d+2r} dans $D_d(z)$ est

$$\sum_{a \in A} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (C_{d+2r}^{r-b+np^{k+1}} - C_{d+2r}^{r-1-b+np^{k+1}}).$$

Démonstration. D'après la proposition précédente, le coefficient de z^{d+2r} dans $D_d(z)$ est

$$\begin{aligned} &\sum_{j \in J} ((C_{d+2r}^{r-j} + C_{d+2r}^{r-j-\delta-1}) - (C_{d+2r}^{r-j-1} + C_{d+2r}^{r-j-\delta})) \\ &= \sum_{j \in J} ((C_{d+2r}^{r-j} + C_{d+2r}^{d+1+r+j+\delta}) - (C_{d+2r}^{r-j-1} + C_{d+2r}^{d+r+j+\delta})). \end{aligned}$$

Il suffit de montrer que $\sum_{j \in J} (C_{d+2r}^{r-j} + C_{d+2r}^{d+1+r+j+\delta}) = \sum_{\substack{a \in A \\ n \in \mathbb{Z}}} C_{d+2r}^{r-b+np^{k+1}}$, la seconde

égalité $\sum_{j \in J} (C_{d+2r}^{r-j-1} + C_{d+2r}^{d+r+j+\delta}) = \sum_{\substack{a \in A \\ n \in \mathbb{Z}}} C_{d+2r}^{r-1-b+np^{k+1}}$ s'obtenant de même.

On pose $S_1 = \sum_{j \in J} C_{d+2r}^{r-j}$ et $S_2 = \sum_{j \in J} C_{d+2r}^{d+1+r+j+\delta}$. On a $J = \{a + p^{k+1}n \mid a \in A, n \in \mathbb{N}\}$, ce qui donne $S_1 = \sum_{\substack{a \in A \\ n \in \mathbb{N}}} C_{d+2r}^{r-a-np^{k+1}}$. Remarquons que l'application

qui envoie $a \in A$ sur $(p^{k+1} - p^{f+1} - \sum_{i=f+1}^k d_i p^i) - a$ est une involution de A : si

$$a = \sum_{i=f+1}^k a_i p^i \text{ avec } 0 \leq a_i \leq p-1-d_i \text{ lorsque } f+1 \leq i \leq k, \text{ on a } (p^{k+1} - p^{f+1} - \sum_{i=f+1}^k d_i p^i) - a = \sum_{i=f+1}^k (p-1-d_i-a_i) p^i \text{ qui est un \u00e9l\u00e9ment de } A. \text{ Par cons\u00e9quent}$$

$$S_2 = \sum_{\substack{a \in A \\ n \in \mathbb{N}}} C_{d+2r}^{d+1+r+\delta+(p^{k+1}-p^{f+1}-\sum_{i=f+1}^k d_i p^i-a)+np^{t_{k+1}}} . \text{ Or } d+1+r+\delta+(p^{k+1}-p^{f+1}-$$

$$\sum_{i=f+1}^k d_i p^i - a) + np^{t_{k+1}} = r + p^{k+1}(n+1) - a. \text{ Autrement dit } S_2 = \sum_{\substack{a \in A \\ n \in \mathbb{N}}} C_{d+2r}^{r-a+(n+1)p^{k+1}},$$

ce qui ach\u00e8ve la preuve. \square

Le lemme technique suivant permet de calculer les sommes de coefficients binomiaux qui apparaissent dans le corollaire qu'on vient d'\u00e9tablir.

Lemme 7.14 *Soient $q, s \in \mathbb{N}$ et $r \in \mathbb{Z}$. On a*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} C_q^{r+ns} = \frac{1}{s} \sum_{j=1}^s \cos\left(\frac{j\pi(q-2r)}{s}\right) (2 \cos\left(\frac{j\pi}{s}\right))^q.$$

D\u00e9monstration. Soit $\eta = e^{\frac{i\pi}{s}}$ et montrons que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} C_q^{r+ns} = \frac{1}{s} \sum_{j=1}^s \eta^{-2rj} (1 + \eta^{2j})^q$.

$$\begin{aligned} \text{On a } \sum_{j=1}^s \eta^{-2rj} (1 + \eta^{2j})^q &= \sum_{j=1}^s \eta^{-2rj} \sum_n C_q^n \eta^{2jn} = \sum_n C_q^n \sum_{j=1}^s \eta^{2j(n-r)} \\ &= \sum_{n \equiv r \pmod{s}} C_q^n \sum_{j=1}^s \eta^{2j(n-r)} + \sum_{n \not\equiv r \pmod{s}} C_q^n \sum_{j=1}^s \eta^{2j(n-r)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_q^{r+ns} \times s + \sum_{n \not\equiv r \pmod{s}} C_q^n \times 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Par cons\u00e9quent } \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_q^{r+ns} &= \frac{1}{s} \sum_{j=1}^s \eta^{-2rj} (1 + \eta^{2j})^q = \frac{1}{s} \sum_{j=1}^s \eta^{j(q-2r)} (\eta^{-j} + \eta^j)^q \\ &= \frac{1}{s} \sum_{j=1}^s \eta^{j(q-2r)} (2 \cos\left(\frac{j\pi}{s}\right))^q, \text{ et on extrait la partie r\u00e9elle de cette derni\u00e8re expression.} \\ &\square \end{aligned}$$

Corollaire 7.15 *Le coefficient de z^{d+2r} dans $D_d(z)$ est*

$$\frac{2}{p^{k+1}} \sum_{j=1}^{p^{k+1}-1} \left(\sum_{a \in A} \sin\left(\frac{j\pi(d+1+2a)}{p^{k+1}}\right) \right) \sin\left(\frac{j\pi}{p^{k+1}}\right) (2 \cos\left(\frac{j\pi}{p^{k+1}}\right))^{d+2r}.$$

D\u00e9monstration. Des r\u00e9sultats qui pr\u00e9c\u00e8dent, on d\u00e9duit que le coefficient de z^{d+2r} dans $D_d(z)$ est

$$\frac{1}{p^{k+1}} \sum_{a \in A} \sum_{j=1}^{p^{k+1}} \left(\cos\left(\frac{j\pi(d+2a)}{p^{k+1}}\right) - \cos\left(\frac{j\pi(d+2+2a)}{p^{k+1}}\right) \right) (2 \cos\left(\frac{j\pi}{p^{k+1}}\right))^{d+2r}.$$

7.3. SÉRIE GÉNÉRATRICE POUR $SL(2)$

On voit immédiatement que le terme correspondant à $j = p^{k+1}$ est nul, et la formule $\cos x - \cos y = 2 \sin(\frac{x+y}{2}) \sin(\frac{y-x}{2})$ donne l'expression annoncée. \square

7.3.3 Décomposition en éléments simples

A partir du dernier corollaire de la section qui précède, on obtient une première décomposition de la fraction rationnelle $D_d(z)$. On conserve les notations de la section précédente.

Proposition 7.16 *On a*

$$D_d(z) = \frac{2}{p^{k+1}} \sum_{j=1}^{p^{k+1}-1} \left(\sum_{a \in A} \sin\left(\frac{j\pi(d+1+2a)}{p^{k+1}}\right) \right) \sin\left(\frac{j\pi}{p^{k+1}}\right) \frac{(2 \cos(\frac{j\pi}{p^{k+1}})z)^d}{1 - (2 \cos(\frac{j\pi}{p^{k+1}}))^2 z^2}.$$

On en déduit la décomposition en éléments simples de $D_d(z)$ si $p \geq 3$.

Corollaire 7.17 *Supposons $p \geq 3$. On a*

$$D_d(z) = \frac{2}{p^{k+1}} \sum_{j=1}^{p^{k+1}-1} \left(\sum_{a \in A} \sin\left(\frac{j\pi(d+1+2a)}{p^{k+1}}\right) \right) \sin\left(\frac{j\pi}{p^{k+1}}\right) \frac{1}{1 - 2 \cos(\frac{j\pi}{p^{k+1}})z}.$$

Démonstration. Montrons tout d'abord que la partie polynômiale est nulle. Les polynômes de Chebyshev satisfont la relation de récurrence $U_{n+2}(X) = 2XU_{n+1}(X) - U_n(X)$, $U_0(X) = 1$ et $U_1(X) = 2X$. On voit en particulier que $U_{2n}(X)$ a un terme constant non nul. Il découle alors du théorème 7.9 que le degré du numérateur de $D_d(z)$ est strictement inférieur à celui du dénominateur.

On détermine maintenant les parties polaires de la décomposition. Un calcul élémentaire donne

$$\frac{(2 \cos(\frac{j\pi}{p^{k+1}})z)^d}{1 - (2 \cos(\frac{j\pi}{p^{k+1}}))^2 z^2} = R(z) + \frac{1}{2} \frac{1}{1 - 2 \cos(\frac{j\pi}{p^{k+1}})z} + \frac{(-1)^d}{2} \frac{1}{1 + 2 \cos(\frac{j\pi}{p^{k+1}})z},$$

où $R(z)$ est un polynôme dépendant de s . On obtient donc

$$D_d(z) = \frac{1}{p^{k+1}} \sum_{j=1}^{p^{k+1}-1} \sin\left(\frac{j\pi}{p^{k+1}}\right) \left(\sum_{a \in A} \sin\left(\frac{j\pi(d+1+2a)}{p^{k+1}}\right) \right) \frac{1}{1 - 2 \cos(\frac{j\pi}{p^{k+1}})z} \\ + \frac{1}{p^{k+1}} \sum_{t=1}^{p^{k+1}-1} \sin\left(\frac{t\pi}{p^{k+1}}\right) \left(\sum_{a \in A} \sin\left(\frac{t\pi(d+1+2a)}{p^{k+1}}\right) \right) \frac{(-1)^d}{1 + 2 \cos(\frac{t\pi}{p^{k+1}})z}.$$

On pose $t = p^{k+1} - j$ dans la seconde somme, d'où

$$\sum_{t=1}^{p^{k+1}-1} \sin\left(\frac{t\pi}{p^{k+1}}\right) \left(\sum_{a \in A} \sin\left(\frac{t\pi(d+1+2a)}{p^{k+1}}\right) \right) \frac{(-1)^d}{1 + 2 \cos(\frac{t\pi}{p^{k+1}})z} \\ = \sum_{j=1}^{p^{k+1}-1} \sin\left(\frac{j\pi}{p^{k+1}}\right) \left(\sum_{a \in A} (-1)^d \sin\left(\frac{j\pi(d+1+2a)}{p^{k+1}}\right) \right) \frac{(-1)^d}{1 - 2 \cos(\frac{j\pi}{p^{k+1}})z}.$$

On a donc bien la formule voulue. \square

Remarquons que si $p = 2$, la partie polaire est la même que ci-dessus, et on voit facilement que la partie polynômiale est constante. Plus précisément, elle est nulle lorsque d est impair, elle vaut $\frac{-1}{2^{k-1}}$ lorsque d est congru à 2 modulo 4, et elle vaut $\frac{1}{2^{k-1}}$ lorsque 4 divise d . On ne détaille pas les calculs car on n'aura pas besoin de la décomposition en éléments simples de $D_d(z)$ lorsque $p = 2$.

7.4 Série génératrice pour chaque famille de groupes

Dans cette partie, on montre comment exprimer simplement $\chi(z)$ en fonction de $D_d(z)$. On en déduit en particulier que $\chi(z)$ est une fraction rationnelle à pôles réels positifs et simples. Lorsque $\mathcal{F} = (\mathrm{Sp}(2q))_{q \geq 1}$, $(\mathrm{Spin}(2q+1))_{q \geq 1}$ ou $(\mathrm{Spin}(2q))_{q \geq 1}$, on donne aussi des formules pour calculer les dimensions des sous-espaces de poids. Dans les prochaines sections, on exploite le théorème qui suit pour obtenir des formules plus explicites pour les dimensions des G -modules simples.

Théorème 7.18

$$\text{Si } \mathcal{F} = (\mathrm{Sp}(2q))_{q \geq 1}, \quad \chi_d(z) = \frac{1}{z^d} \left(\frac{1}{1-2z} * D_d(z) \right).$$

$$\text{Si } \mathcal{F} = (\mathrm{Spin}(2q+1))_{q \geq 1}, \quad \chi_d \left(\frac{1}{2} z^2 \right) = \frac{2^d}{z^{2d+1}} D_{2d+1}(z).$$

$$\text{Si } \mathcal{F} = (\mathrm{Spin}(2q))_{q \geq 1}, \quad \chi_d \left(\frac{1}{2} z^2 \right) = \frac{2^{d-1}}{z^{2d}} D_{2d}(z).$$

$$\text{Si } \mathcal{F} = (\mathrm{SO}(2q+1))_{q \geq 1}, \quad \chi_{d,e}(z^2) = \frac{1}{z^{2d+1}} (D_{d-e}(z) * D_{d+e+1}(z)).$$

$$\text{Si } \mathcal{F} = (\mathrm{SO}(2q))_{q \geq 1} \text{ et } e \neq 0, \quad \chi_{d,e}(z^2) = \frac{1}{z^{2d}} (D_{d-e}(z) * D_{d+e}(z)).$$

$$\text{Si } \mathcal{F} = (\mathrm{SO}(2q))_{q \geq 1} \text{ et } e = 0, \quad \chi_{d,0}(z^2) = \frac{1}{2} \frac{1}{z^{2d}} (D_d(z) * D_d(z)).$$

Démonstration. 1. Soit $\mathcal{F} = (\mathrm{Sp}(2q))_{q \geq 1}$ et considérons la $(\mathrm{Sp}(2d+2n), \mathrm{Sp}(2))$ paire duale \mathbb{M} . La dimension de $L_{d+n}(\omega_n)$ est la multiplicité de $T(d)$ dans $(\Lambda V_2)^{\otimes(d+n)} = (2T(0) + T(1))^{\otimes(d+n)} = \sum_{k=0}^{d+n} C_{d+n}^k 2^{d+n-k} T(1)^{\otimes k}$. Par conséquent $\dim L_{d+n}(\omega_n)$ est le coefficient de z^{d+n} dans $\left(\frac{1}{1-2z} * D_d(z) \right)$.

2. Soit $\mathcal{F} = (\mathrm{Spin}(2q+1))_{q \geq 1}$. L'étude de la $(\mathrm{Spin}(2d+2n+1), \mathrm{Spin}(3))$ -paire duale \mathbb{M} montre que la dimension de $L_{d+n}(\omega_+ + \Omega_n)$ est la multiplicité de $T((2d+1)\omega_+)$ dans $(\Lambda V_2)^{\otimes(d+n)} \otimes \Lambda V_{2-} = (2 + 2V_2)^{\otimes(d+n)} \otimes \Lambda V_{2-} = (2 + 2T(2\omega_+))^{\otimes(d+n)} \otimes T(\omega_+)$. Après identification de $\mathrm{Spin}(3)$ avec SL_2 , on trouve

7.4. SÉRIE GÉNÉRATRICE POUR CHAQUE FAMILLE DE GROUPE

que $\dim L_{d+n}(\omega_+ + \Omega_n)$ est la multiplicité de $T(2d+1)$ dans $(2+2T(2))^{\otimes(d+n)} \otimes T(1)$. Or $1+T(2) = T(1) \otimes T(1)$ d'après le lemme 7.1, donc $\dim L_{d+n}(\omega_+ + \Omega_n)$ est la multiplicité de $T(2d+1)$ dans $2^{d+n}T(1)^{\otimes(2d+2n+1)}$, c'est-à-dire 2^{d+n} que multiplie le coefficient de $z^{2d+2n+1}$ dans $D_{2d+1}(z)$. On en déduit que le coefficient de z^{2n} de $\chi_d(\frac{1}{2}z^2)$ est 2^d que multiplie le coefficient de $z^{2d+2n+1}$ dans $D_{2d+1}(z)$. Les fonctions $\chi_d(\frac{1}{2}z^2)$ et $\frac{1}{z^{2d+1}}D_{2d+1}$ étant paires, on en déduit le résultat.

3. Soit $\mathcal{F} = (\text{Spin}(2q))_{q \geq 1}$. On utilise la $(\text{Pin}(2d+2n), \text{SO}(3))$ paire duale \mathbb{M} pour gagner du temps : on évite ainsi les questions de signe pour les représentations de $\text{O}(3)$. Il faut noter que la fonction $\chi(z)$ pour la paire $(\text{Pin}(2d+2n), \text{SO}(3))$ est le double de la fonction $\chi(z)$ pour la paire $(\text{Spin}(2d+2n), \text{O}(3))$. La dimension de $L_{d+n}(\omega_+ + \Omega_n, 0)$ est la multiplicité de $T(d\varepsilon_1)$ dans $(\Lambda V_2)^{\otimes(d+n)}$ sous l'action de $\text{SO}(3)$, et un calcul identique au cas précédent donne la formule annoncée.
4. Soit $\mathcal{F} = (\text{SO}(2q+1))_{q \geq 1}$. On considère la $(\text{SO}(2d+2n+1), \text{Pin}(4))$ paire duale \mathbb{M} . La dimension de $L_{d+n}(\Omega_n + \Omega_{n+d-e})$ est la multiplicité de $T((d+\frac{1}{2})\varepsilon_1 + (e+\frac{1}{2})\varepsilon_2, 0)$ dans $(\Lambda V_2)^{\otimes(d+n)} \otimes \Lambda V_{2-}$ sous l'action de $\text{Pin}(4)$, qui est aussi la multiplicité de $T((d+\frac{1}{2})\varepsilon_1 + (e+\frac{1}{2})\varepsilon_2)$ dans $(\Lambda V_2)^{\otimes(d+n)} \otimes \Lambda V_{2-}$ sous l'action de $\text{Spin}(4)$. On a déjà vu, dans la démonstration de la proposition 7.3, que $\Lambda V_2 = (1 \boxtimes T(1) \oplus T(1) \boxtimes 1)^{\otimes 2}$ sous $\text{SL}(2) \times \text{SL}(2)$, et $\Lambda V_{2-} = 1 \boxtimes T(1) \oplus T(1) \boxtimes 1$. On a donc

$$\begin{aligned} \chi_{d,e}(z) &= \sum_{n \geq 0} [(1 \boxtimes T(1) \oplus T(1) \boxtimes 1)^{\otimes(2d+2n+1)} : T(d-e) \boxtimes T(d+e+1)] z^n \\ &= \sum_{n \geq 0} \sum_i C_{2d+2n+1}^i [T(1)^{\otimes i} \boxtimes T(1)^{2d+2n+1-i} : T(d-e) \boxtimes T(d+e+1)] z^n \\ &= \sum_{n \geq 0} \sum_i C_{2d+2n+1}^i [T(1)^{\otimes i} : T(d-e)] [T(1)^{2d+2n+1-i} : T(d+e+1)] z^n. \end{aligned}$$

Comme $[T(1)^{\otimes i} : T(d-e)]$ est le coefficient de z^i dans D_{d-e} et $[T(1)^{2d+2n+1-i} : T(d+e+1)]$ est le coefficient de $z^{2d+2n+1-i}$ dans D_{d+e+1} , on voit que

$$\begin{aligned} &\frac{1}{z^{2d+1}} D_{d-e} * D_{d+e+1} \\ &= \sum_{n \geq 0} \sum_i C_{2d+2n+1}^i [T(1)^{\otimes i} : T(d-e)] [T(1)^{2d+2n+1-i} : T(d+e+1)] z^n \\ &= \sum_{n \geq 0} \sum_i C_{2d+2n+1}^i [T(1)^{\otimes i} : T(d-e)] [T(1)^{2d+2n+1-i} : T(d+e+1)] z^{2n} \end{aligned}$$

car $\frac{1}{z^{2d+1}} D_{d-e} * D_{d+e+1}$ est paire, d'où le résultat annoncé.

5. Soit $\mathcal{F} = (\text{SO}(2q))_{q \geq 1}$. On utilise la $(\text{O}(2d+2n), \text{SO}(4))$ paire duale \mathbb{M} pour éviter les difficultés liées à la décomposition des produits tensoriels sous $\text{O}(4)$. La dimension de $L_{d+n}(\Omega_n + \Omega_{n+d-e}, \varepsilon)$ ($\varepsilon = 0$ ou $\varepsilon = +$) est la multiplicité de $T(d\varepsilon_1 + e\varepsilon_2)$ dans $(\Lambda V_2)^{\otimes(d+n)}$ sous l'action de $\text{SO}(4)$. Un calcul identique au cas précédent donne $\sum_{n \geq 0} \dim L_{d+n}(\Omega_n + \Omega_{n+d-e}, \varepsilon) z^{2n} = \frac{1}{z^{2d}} (D_{d-e} * D_{d+e})$, et on en déduit les deux formules.

□

Corollaire 7.19 Soient $\mathcal{F} = (\mathrm{Sp}(2q))_{q \geq 1}$ et $d \in \mathbb{N}$. Si $d + 1 = \sum_{i=f}^k d_i p^{ti}$ est la décomposition en base p de $d + 1$, on a

$$\chi_d(z) = \frac{1}{z^{d+1}} \prod_{i=f}^k \frac{U_{(p-d_i)p^i-1}(\frac{1}{2z} - 1)}{U_{p^{i+1}-1}(\frac{1}{2z} - 1)}.$$

Dans le corollaire qui suit, on généralise les observations faites dans le premier paragraphe du chapitre, et on donne en particulier le plus petit pôle de $\chi(z)$, qui interviendra dans le paragraphe 7.7.

Corollaire 7.20 Les pôles de $\chi(z)$ sont simples, réels et positifs. Plus précisément :

1. Si $\mathcal{F} = (\mathrm{Sp}(2q))_{q \geq 1}$, les pôles de $\chi_d(z)$ sont de la forme $\frac{1}{2+2 \cos(\frac{j\pi}{p^{k+1}})} = \frac{1}{4 \cos^2(\frac{j\pi}{2p^{k+1}})}$, $1 \leq j \leq p^{k+1} - 1$, où p^k est la plus grande puissance de p dans le développement en base p de $d + 1$. Le plus petit pôle est $\frac{1}{4 \cos^2(\frac{\pi}{2p^{k+1}})}$.
2. Si $\mathcal{F} = (\mathrm{Spin}(2q + 1))_{q \geq 1}$ ou $(\mathrm{Spin}(2q))_{q \geq 1}$, les pôles de $\chi_d(z)$ sont de la forme $\frac{1}{8 \cos^2(\frac{j\pi}{p^{k+1}})}$, $1 \leq j \leq p^{k+1} - 1$, où p^{k+1} est la plus grande puissance de p dans le développement en base p de $2d + 2$ si $\mathcal{F} = (\mathrm{Spin}(2q + 1))_{q \geq 1}$ (resp. $2d + 1$ si $\mathcal{F} = (\mathrm{Spin}(2q))_{q \geq 1}$). Le plus petit pôle est $\frac{1}{8 \cos^2(\frac{\pi}{p^{k+1}})}$.
3. Si $\mathcal{F} = (\mathrm{SO}(2q + 1))_{q \geq 1}$ ou $(\mathrm{SO}(2q))_{q \geq 1}$, les pôles de $\chi_{d,e}(z)$ sont de la forme $\frac{1}{4(\cos(\frac{i\pi}{p^{h+1}}) + \cos(\frac{j\pi}{p^{k+1}}))^2}$, $1 \leq i \leq p^{h+1} - 1$, $1 \leq j \leq p^{k+1} - 1$, où p^h est la plus grande puissance de p dans le développement en base p de $d - e + 1$, et p^k est la plus grande puissance de p dans le développement en base p de $d + e + 2$ si $\mathcal{F} = (\mathrm{SO}(2q + 1))_{q \geq 1}$ (resp. $d + e + 1$ si $\mathcal{F} = (\mathrm{SO}(2q))_{q \geq 1}$). Le plus petit pôle est $\frac{1}{4(\cos(\frac{\pi}{p^{h+1}}) + \cos(\frac{\pi}{p^{k+1}}))^2}$.

Démonstration. Ce corollaire est une conséquence presque immédiate des propriétés du produit de convolution $*$, associées à la description des pôles de $D_d(z)$ faite au paragraphe 7.3.1. Pour les groupes autres que le groupe symplectique, il faut remarquer que si la série $F(z^2)$ est rationnelle à pôles simples, on peut regrouper chaque pôle de la fraction rationnelle paire $F(z^2)$ avec son opposé, et l'équation $\frac{1}{1-az} + \frac{1}{1+az} = \frac{2}{1-a^2z^2}$ permet de conclure. \square

Lorsque $G = \mathrm{Sp}(2m)$, $\mathrm{Spin}(2m + 1)$ ou $\mathrm{Spin}(2m)$, on obtient des formules analogues aux précédentes pour calculer les dimensions des sous-espaces de poids.

Proposition 7.21 Soient $r, s \leq m$.

Si $G = \mathrm{Sp}(2m)$, la dimension de $L(\omega_r)_{\omega_s}$ est le coefficient de z^{m-s} dans $D_{m-r}(z)$.

Si $G = \mathrm{Spin}(2m + 1)$, la dimension de $L(\omega_+ + \Omega_r)_{\omega_+ + \Omega_s}$ est le coefficient de z^{m-s} dans $\frac{1}{z-1} * \frac{D_{2(m-r)+1}(\sqrt{z})}{\sqrt{z}}$.

7.5. FORMULES POUR LES GROUPE SYMPLECTIQUES ET SPIN

Si $G = \text{Spin}(2m)$ et si $r - s$ est pair, la dimension de $L(\omega_+ + \Omega_r)_{\omega_+ + \Omega_s}$ est le coefficient de z^{m-s} dans $\frac{1}{z-1} * D_{2(m-r)}(\sqrt{z})$, et la dimension de $L(\omega_+ + \Omega_r)_{\omega_- + \Omega_s}$ est nulle.

Si $G = \text{Spin}(2m)$ et si $r - s$ est impair, la dimension de $L(\omega_+ + \Omega_r)_{\omega_- + \Omega_s}$ est le coefficient de z^{m-s-1} dans $\frac{1}{z-1} * D_{2(m-r)}(\sqrt{z})$ et la dimension de $L(\omega_+ + \Omega_r)_{\omega_+ + \Omega_s}$ est nulle.

Démonstration. Si $\mathcal{F} = (\text{Sp}(2q))_{q \geq 1}$ et $n \geq 0$, on a $\dim L_{d+n}(\omega_n)_{\omega_{n-l}} = [T(1)^{\otimes(d+l)} : T(d)]$, et il suffit de poser $n = r$, $d = m - r$ et $l = r - s$ pour en déduire le résultat.

Si $\mathcal{F} = (\text{Spin}(2q+1))_{q \geq 1}$, on a $\dim L_{d+n}(\omega_+ + \Omega_n)_{\omega_+ + \Omega_{n-l}} = [T(2)^{\otimes(d+l)} \otimes T(1) : T(2d+1)] = [(T(1) \otimes T(1) - 1)^{\otimes(d+l)} \otimes T(1) : T(2d+1)] = \sum_{k=0}^{d+l} C_{d+l}^k (-1)^{d+l-k} [T(1)^{\otimes(2k+1)} : T(2d+1)]$. Cette dernière expression est le coefficient de z^{d+l} dans $\frac{1}{z-1} * \frac{D_{2d+1}(\sqrt{z})}{\sqrt{z}}$, et il n'y a plus qu'à poser $n = r$, $d = m - r$ et $l = r - s$.

On procède de même si $\mathcal{F} = (\text{Spin}(2q))_{q \geq 1}$. Sous l'action de σ_c , on a $\dim L_{d+n}(\omega_+ + \Omega_n)_{\omega_+ + \Omega_{n-l}} = [T(\varepsilon_1, -)^{\otimes(d+l)} : T(d\varepsilon_1, (-1)^d)]$. Si cette dimension est non nulle, l est nécessairement pair, et en identifiant $\text{SO}(3)$ et $\text{SL}(2)$ on trouve $\dim L_{d+n}(\omega_+ + \Omega_n)_{\omega_+ + \Omega_{n-l}} = [T(2)^{\otimes(d+l)} : T(2d)] = \sum_{k=0}^{d+l} C_{d+l}^k (-1)^{d+l-k} [T(1)^{\otimes(2k)} : T(2d)]$. On trouve pareillement $\dim L_{d+n}(\omega_+ + \Omega_n)_{\omega_- + \Omega_{n-l}} = [T(2)^{\otimes(d+l-1)} : T(2d)]$ avec l impair. \square

Dans la section 7.5, on obtient d'autres expressions pour les dimensions des modules simples ne faisant plus intervenir les séries et la convolution, et on pourrait obtenir sans difficulté des résultats analogues pour les dimensions des sous-espaces de poids à partir de la proposition qu'on vient de démontrer.

7.5 Formules pour les groupes symplectiques et spin

On obtient dans cette section plusieurs expressions pour les dimensions des modules simples lorsque $G = \text{Sp}(2m)$, $\text{Spin}(2m)$ ou $\text{Spin}(2m+1)$. On les obtient d'abord comme coefficients de séries entières très simples, ce qui permet notamment, grâce à l'informatique, d'obtenir les valeurs numériques des dimensions, même lorsque les différents paramètres sont grands. On écrit ensuite les dimensions des modules simples comme somme alternée de dimensions de modules de Weyl. Notons qu'au chapitre suivant, on verra que ces égalités sont également vraies au niveau des caractères. Enfin on exprime les dimensions des modules simples par des sommes "périodiques" de coefficients binomiaux.

Définition 7.22 Pour tout $r \leq m$ on pose

1. $R = m + 1 - r$ si $G = \text{Sp}(2m)$,
2. $R = 2(m + 1 - r)$ si $G = \text{Spin}(2m + 1)$,
3. $R = 2(m + 1 - r) - 1$ si $G = \text{Spin}(2m)$,

et soit $R = \sum_{i=f}^k R_i p^i$ la décomposition de R en base p avec $R_f \neq 0$ et $R_k \neq 0$.

Ces notations sont utilisées dans toute la suite de la section 7.5, et on les complète dans la section 7.6, ainsi qu'au chapitre suivant.

7.5.1 Séries entières élémentaires

Proposition 7.23 *Si $G = \text{Spin}(2m + 1)$, alors $\frac{1}{2^m} \dim L(\omega_+ + \Omega_r)$ est le coefficient de X^r dans le développement en série entière de $(1 - X)(1 + X)^{2m+1} \prod_{i=f}^k \frac{X^{(p-d_i)p^i} - 1}{X^{2p^{i+1}} - 1}$.*

Si $G = \text{Spin}(2m)$, alors $\frac{1}{2^{m-1}} \dim L(\omega_+ + \Omega_r)$ est le coefficient de X^r dans le développement en série entière de $(1 - X)(1 + X)^{2m} \prod_{i=f}^k \frac{X^{(p-d_i)p^i} - 1}{X^{2p^{i+1}} - 1}$.

Démonstration. Supposons $G = \text{Spin}(2m + 1)$. Par définition $\dim L(\omega_+ + \Omega_r)$ est le coefficient de z^r dans $\chi_{m-r}(z)$, qui est aussi le coefficient de z^{2r} dans $2^m \frac{D_{2(m-r)+1}(z)}{z^{2(m-r)+1}}$. Ainsi $\frac{1}{2^m} \dim L(\omega_+ + \Omega_r)$ est le coefficient de z^{2m+1} dans $D_{2(m-r)+1}(z)$, et il n'y a plus qu'à appliquer le théorème 7.10. On procède de même si $G = \text{Spin}(2m)$. \square

Proposition 7.24 *Si $G = \text{Sp}(2m)$, alors $\dim L(\omega_r)$ est le coefficient de X^r dans le développement en série entière de $(1 - X)(1 + X)^{2m+1} \prod_{i=f}^k \frac{X^{2(p-d_i)p^i} - 1}{X^{2p^{i+1}} - 1}$.*

Démonstration. Posons $d = m - r$ et suivons la méthode de [14]. On doit montrer que le coefficient de z^r dans $\chi_d(z)$ est le coefficient de X^r dans le développement en série entière de $\Theta_{d,r}(X) = (1 - X)(1 + X)^{2d+2r+1} \prod_{i=f}^k \frac{X^{2(p-d_i)p^i} - 1}{X^{2p^{i+1}} - 1}$. Or le coefficient de

z^r dans $\chi_d(z)$ est égal à $\frac{1}{2i\pi} \oint \frac{\chi_d(z)}{z^{r+1}} dz$, le contour étant un lacet d'indice 1 autour de l'origine. Soit $\theta \in \mathbb{R}$, et posons $w = e^{i\theta}$ et $\frac{1}{2z} - 1 = \cos \theta = \frac{1}{2}(w + \frac{1}{w})$. On a $z = \frac{w}{(w+1)^2}$ et $\sin(k\theta) = \frac{w^k - w^{-k}}{2i}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, d'où, à l'aide de 7.19

$$\begin{aligned} \chi_d(z) &= \frac{1}{\left(\frac{w}{w+1}\right)^{d+1}} \prod_{i=f}^k \frac{\sin((p-d_i)p^i\theta)}{\sin(p^{i+1}\theta)} = \frac{(1+w)^{2d+2}}{w^{d+1}} \prod_{i=f}^k \frac{w^{(p-d_i)p^i} - w^{-(p-d_i)p^i}}{w^{p^{i+1}} - w^{-p^{i+1}}} \\ &= \frac{(1+w)^{2d+2}}{w^{d+1}} \prod_{i=f}^k \frac{w^{2(p-d_i)p^i} - 1}{w^{2p^{i+1}} - 1} w^{d+1} = (1+w)^{2d+2} \prod_{i=f}^k \frac{w^{2(p-d_i)p^i} - 1}{w^{2p^{i+1}} - 1}. \end{aligned}$$

Comme $dz = \frac{1-w}{(1+w)^3} dw$, l'application $w \mapsto z$ est biholomorphe dans un petit voisinage de l'origine, on peut donc effectuer le changement de variable $z = \frac{w}{(w+1)^2}$, ce qui donne

7.5. FORMULES POUR LES GROUPES SYMPLECTIQUES ET SPIN

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i\pi} \oint \frac{\chi_d(z)}{z^{r+1}} dz &= \frac{1}{2i\pi} \oint \frac{(1-w)(1+w)^{2r-1}}{w^{r+1}} \chi_d\left(\frac{w}{(w+1)^2}\right) dw \\ &= \frac{1}{2i\pi} \oint \frac{(1-w)(1+w)^{2d+2r+1}}{w^{r+1}} \prod_{i=f}^k \frac{w^{2(p-d_i)p^i} - 1}{w^{2p^{i+1}} - 1} dw = \frac{1}{2i\pi} \oint \frac{\Theta_{d,r}(w)}{w^{r+1}} dw. \end{aligned}$$

□

Exemple 7.25 Soit $m = 10$, $p = 2$ et $G = \text{Sp}(2m)$. On trouve le tableau suivant pour les dimensions des modules simples, la dernière ligne donnant les dimensions en caractéristique zéro. Remarquons que $\dim L(\omega_m) = 1024 = 2^{10}$, conformément au théorème 6.1. On remarque aussi que si on écrit $m + 1 = 1 + 2 + 2^3$, les valeurs de r pour lesquelles $\Delta(\omega_r)$ est simple sont $1, 1 + 2, 1 + 2 + 2^2$, comme le veut le corollaire 8.14.

r	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\dim L(\omega_r)$	20	188	1120	4466	14344	29448	62016	53296	76096	1024
$C_{2m}^r - C_{2m}^{r-2}$	20	189	1120	4655	14364	33915	62016	87210	90440	58786

7.5.2 Modules de Weyl

On écrit maintenant $\dim L(\omega_r)$ comme une somme alternée de dimensions de modules de Weyl à l'aide de la proposition 7.11. Dans le théorème qui suit, on convient que $\Delta(\omega_s) = \Delta(\omega_+ + \Omega_s) = 0$ si $s < 0$, et $\Delta(\omega_0)$ est le module trivial. Au chapitre suivant (théorème 8.16), on améliore ce théorème en montrant qu'on peut y remplacer $\dim(?)$ par $\text{ch}(?)$ lorsque $G = \text{Sp}(2m)$ ou $\text{Spin}(2m + 1)$. Si $G = \text{Spin}(2m)$, on peut remplacer $\dim(?)$ par $\text{ch}(?)$ à condition de remplacer $\omega_+ + \Omega_{r-j}$ (resp. $\omega_+ + \Omega_{r-(j+\delta)}$) par $\omega_- + \Omega_{r-j}$ (resp. $\omega_- + \Omega_{r-(j+\delta)}$) lorsque j (resp. $(j + \delta)$) est impair.

Théorème 7.26 Soit $\delta = (p - R_f)p^f$.

Si $G = \text{Sp}(2m)$ on a

$$\dim L(\omega_r) = \sum_{j \in J} (\dim \Delta(\omega_{r-2j}) - \dim \Delta(\omega_{r-2(j+\delta)})),$$

et si $G = \text{Spin}(2m + 1)$ ou $G = \text{Spin}(2m)$ on a

$$\dim L(\omega_+ + \Omega_r) = \sum_{j \in J} (\dim \Delta(\omega_+ + \Omega_{r-j}) - \dim \Delta(\omega_+ + \Omega_{r-(j+\delta)})),$$

avec $J = \{j \geq 0 \mid \text{si } j_i \text{ est le coefficient de } p^i \text{ dans la décomposition en base } p \text{ de } j, \text{ on a } j_i = 0 \text{ pour tout } i \leq f \text{ et } j_i + R_i < p \text{ pour tout } i \geq f + 1\}$.

Démonstration. Si $G = \mathrm{Sp}(2m)$, on utilise le théorème 7.24 et on reprend la démonstration de la proposition 7.11. Si $G = \mathrm{Spin}(2m+1)$ ou $\mathrm{Spin}(2m)$, c'est une conséquence directe du théorème 7.18 et de la proposition 7.11, en remarquant que $\dim \Delta(\omega_+ + \Omega_i) = 2^m(C_{2m+1}^i - C_{2m+1}^{i-1})$ (resp. $2^{m-1}(C_{2m}^i - C_{2m}^{i-1})$), comme on l'a montré dans l'exemple 2.6. \square

Exemple 7.27 Soit $G = \mathrm{Sp}(2m)$ et $r = 2$. On trouve immédiatement que

$$\dim L(\omega_2) = \begin{cases} m(2m-1) - 2 & \text{si } p \text{ divise } m, \\ m(2m-1) - 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Corollaire 7.28 Soient r et p fixés.

Si $\mathcal{F} = (\mathrm{Sp}(2q))_{q \geq 1}$, on a

$$\dim L(\omega_r) \underset{m \rightarrow \infty}{\sim} \dim \Delta(\omega_r) \underset{m \rightarrow \infty}{\sim} \frac{2^r}{r!} m^r.$$

Si $\mathcal{F} = (\mathrm{Spin}(2q+1))_{q \geq 1}$, on a

$$\dim L(\omega_+ + \Omega_r) \underset{m \rightarrow \infty}{\sim} \dim \Delta(\omega_+ + \Omega_r) \underset{m \rightarrow \infty}{\sim} \frac{2^r}{r!} 2^m m^r.$$

Si $\mathcal{F} = (\mathrm{Spin}(2q))_{q \geq 1}$, on a

$$\dim L(\omega_+ + \Omega_r) \underset{m \rightarrow \infty}{\sim} \dim \Delta(\omega_+ + \Omega_r) \underset{m \rightarrow \infty}{\sim} \frac{2^r}{r!} 2^{m-1} m^r.$$

Démonstration. Dans le théorème précédent, le cardinal de I est majoré par $r+1$, et les différents termes sont des polynômes en m (multipliés par 2^m pour les groupes spin), ce qui suffit pour conclure. \square

On dispose également de formules faisant intervenir des sommes périodiques de coefficients binomiaux, formules qui s'obtiennent en reprenant la démonstration du corollaire 7.13. On pose $A = \{ \sum_{i=f+1}^k a_i p^i \mid \forall i, 0 \leq a_i \leq p-1 - R_i \}$.

Corollaire 7.29 Si $G = \mathrm{Sp}(2m)$ on a

$$\dim L(\omega_r) = \sum_{a \in A} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (C_{2m}^{r-2a+2np^{k+1}} - C_{2m}^{r-2-2a+2np^{k+1}}).$$

Si $G = \mathrm{Spin}(2m+1)$ on a

$$\dim L(\omega_+ + \Omega_r) = 2^m \sum_{a \in A} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (C_{2m+1}^{r-a+np^{k+1}} - C_{2m+1}^{r-1-a+np^{k+1}}).$$

Si $G = \mathrm{Spin}(2m)$ on a

$$\dim L(\omega_+ + \Omega_r) = 2^{m-1} \sum_{a \in A} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (C_{2m}^{r-a+np^{k+1}} - C_{2m}^{r-1-a+np^{k+1}}).$$

7.6 Expressions trigonométriques

Dans cette section, on obtient pour chaque groupe classique G les dimensions des G -modules simples comme sommes de produits de $\cos \frac{i\pi}{p^k}$ et $\sin \frac{j\pi}{p^k}$. Ces dernières formules peuvent s'obtenir directement à partir du théorème 7.18 et de la décomposition explicite de $D_d(z)$ en éléments simples, et c'est d'ailleurs comme cela qu'on procède pour les groupes spéciaux orthogonaux.

Définition 7.30 *Pour tous $q \leq r \leq m$ on pose*

1. $R = m + 1 - r$ si $G = \text{Sp}(2m)$,
2. $R = 2m + 2 - 2r$ si $G = \text{Spin}(2m + 1)$,
3. $R = 2m + 1 - 2r$ si $G = \text{Spin}(2m)$,
4. $R = 2m + 2 - r - q$ et $S = r - q + 1$ si $G = \text{SO}(2m + 1)$,
5. $R = 2m + 1 - r - q$ et $S = r - q + 1$ si $G = \text{SO}(2m)$.

Soit $R = \sum_{i=f}^k R_i p^i$ et $S = \sum_{i=g}^l S_i p^i$ les décompositions en base p de R et S , avec

$R_f \neq 0, R_k \neq 0, S_g \neq 0, S_l \neq 0$. On pose $A = \left\{ \sum_{i=f+1}^k a_i p^i \mid \forall i, 0 \leq a_i \leq p - 1 - R_i \right\}$

et $B = \left\{ \sum_{i=g+1}^l b_i p^i \mid \forall i, 0 \leq b_i \leq p - 1 - S_i \right\}$.

Proposition 7.31 *Si $G = \text{Sp}(2m)$, la dimension de $L(\omega_r)$ est*

$$\frac{2}{p^{k+1}} \sum_{i=1}^{p^{k+1}-1} \left(\sum_{a \in A} \sin\left(\frac{i\pi(R+2a)}{p^{k+1}}\right) \right) \sin\left(\frac{i\pi}{p^{k+1}}\right) (2 \cos\left(\frac{i\pi}{2p^{k+1}}\right))^{2m}.$$

Si $G = \text{Spin}(2m + 1)$, la dimension de $L(\omega_+ + \Omega_r)$ est

$$\frac{2^{m+1}}{p^{k+1}} \sum_{i=1}^{p^{k+1}-1} \left(\sum_{a \in A} \sin\left(\frac{i\pi(R+2a)}{p^{k+1}}\right) \right) \sin\left(\frac{i\pi}{p^{k+1}}\right) (2 \cos\left(\frac{i\pi}{p^{k+1}}\right))^{2m+1}.$$

Si $G = \text{Spin}(2m)$, la dimension de $L(\omega_+ + \Omega_r)$ est

$$\frac{2^m}{p^{k+1}} \sum_{i=1}^{p^{k+1}-1} \left(\sum_{a \in A} \sin\left(\frac{i\pi(R+2a)}{p^{k+1}}\right) \right) \sin\left(\frac{i\pi}{p^{k+1}}\right) (2 \cos\left(\frac{i\pi}{p^{k+1}}\right))^{2m}.$$

Si $G = \text{SO}(2m + 1)$ et $r \geq q$, la dimension de $L(\Omega_r + \Omega_q)$ est

$$\frac{4}{p^{l+k+2}} \sum_{\substack{1 \leq i \leq p^{k+1}-1 \\ 1 \leq j \leq p^{l+1}-1}} \left(\sum_{\substack{a \in A \\ b \in B}} \sin\left(\frac{i\pi(R+2a)}{p^{k+1}}\right) \sin\left(\frac{j\pi(S+2b)}{p^{l+1}}\right) \right)$$

$$\sin\left(\frac{i\pi}{p^{k+1}}\right) \sin\left(\frac{j\pi}{p^{l+1}}\right) \left(2 \cos\left(\frac{i\pi}{p^{k+1}}\right) + 2 \cos\left(\frac{j\pi}{p^{l+1}}\right)\right)^{2m+1}.$$

Si $G = \text{SO}(2m)$ et $m > r \geq q$, la dimension de $L(\Omega_r + \Omega_q)$ est

$$\frac{4}{p^{l+k+2}} \sum_{\substack{1 \leq i \leq p^{k+1} - 1 \\ 1 \leq j \leq p^{l+1} - 1}} \left(\sum_{\substack{a \in A \\ b \in B}} \sin\left(\frac{i\pi(R+2a)}{p^{k+1}}\right) \sin\left(\frac{j\pi(S+2b)}{p^{l+1}}\right) \right) \sin\left(\frac{i\pi}{p^{k+1}}\right) \sin\left(\frac{j\pi}{p^{l+1}}\right) \left(2 \cos\left(\frac{i\pi}{p^{k+1}}\right) + 2 \cos\left(\frac{j\pi}{p^{l+1}}\right)\right)^{2m}.$$

Si $r = m$, il faut diviser ce nombre par deux.

Démonstration. Pour les groupes symplectiques et spin, on peut déduire immédiatement le résultat de la proposition 7.29 et du lemme 7.14. Notons cependant que si $G = \text{Sp}(2m)$, on trouve tout d'abord que la dimension de $L(\omega_r)$ est

$$\frac{1}{p^{k+1}} \sum_{i=1}^{2p^{k+1}} \left(\sum_{a \in A} \sin\left(\frac{i\pi(R+2a)}{p^{k+1}}\right) \right) \sin\left(\frac{i\pi}{p^{k+1}}\right) \left(2 \cos\left(\frac{i\pi}{2p^{k+1}}\right)\right)^{2m}.$$

Les termes correspondant à $i = p^{k+1}$ et $i = 2p^{k+1}$ sont nuls, on peut donc couper la somme en deux : une première somme sur i compris entre 1 et $p^{k+1} - 1$, une seconde sur i compris entre $p^{k+1} + 1$ et $2p^{k+1} - 1$. Dans la seconde somme, on pose $i = 2p^{k+1} - j$, avec j compris entre 1 et $p^{k+1} - 1$, et ce changement montre que les deux sommes sont égales, d'où la formule voulue.

Pour les groupes spéciaux orthogonaux, il faut utiliser le théorème 7.18 et le corollaire 7.17, c'est-à-dire la décomposition de $D_d(z)$ en éléments simples. \square

Exemple 7.32 Si $G = \text{Sp}(2m)$, on a $\dim L(\omega_m) = \frac{2}{p} \sum_{i=1}^{p-1} \sin^2\left(\frac{i\pi}{p}\right) \left(2 + 2 \cos\left(\frac{i\pi}{p}\right)\right)^m$. Si $p = 2$ ou $p = 3$ on trouve respectivement 2^m et $\frac{1}{2}(3^m + 1)$, résultats déjà obtenus au chapitre précédent (théorèmes 6.1 et 6.3). Si $p = 5$, on a $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$, $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, $\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{5-\sqrt{5}}{8}$, $\sin^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{5+\sqrt{5}}{8}$, d'où $\dim L(\omega_m) = \frac{1}{5} \left(\frac{5-\sqrt{5}}{4} \left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)^m + \frac{5+\sqrt{5}}{4} \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)^m + \frac{5+\sqrt{5}}{4} \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^m + \frac{5-\sqrt{5}}{4} \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^m \right)$.

7.7 Comportement asymptotique

C'est le plus petit pôle de $\chi(z)$, déterminé dans la section 7.4, qui dicte le comportement asymptotique des dimensions des G -modules simples lorsque le rang de G tend vers l'infini : soit a non nul et $b = \frac{1}{a}$. On a $\frac{1}{z-a} = \frac{-1}{a} \frac{1}{1-bz} = \frac{-1}{a} \sum_{n \geq 0} b^n z^n$. Ainsi, lorsque n devient grand, le coefficient de z^n dans $\chi(z)$ est équivalent à cb^n , où

7.7. COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE

c est une constante non nulle et b a le plus grand module, ce qui signifie que a est le plus petit pôle de $\chi(z)$. Soit $\mathcal{F} = (\mathrm{Sp}(2q))_{q \geq 1}$ par exemple, et soient p et d fixés. Il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\dim L_{d+n}(\omega_n) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} c 4^n \cos^{2n} \left(\frac{\pi}{2p^{k+1}} \right)$$

où p^k est la plus grande puissance de p dans le développement en base p de $d + 1$. Les formules de la section précédente nous permettent d'obtenir l'expression de c en fonction de p et d .

Avant même de déterminer la valeur exacte de c , on peut comparer les dimensions avec celles de caractéristique zéro. Si $\mathcal{F} = (\mathrm{Sp}(2q))_{q \geq 1}$ on a $\dim L_{d+n}(\omega_n) = C_{2d+2n}^n - C_{2d+2n}^{n-2}$ en caractéristique zéro, et en s'aidant de la formule de Stirling on trouve $\dim L_{d+n}(\omega_n) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{4^{d+1}(d+1)}{\sqrt{\pi}} \frac{4^n}{n\sqrt{n}}$. On voit en particulier que le rapport des deux dimensions décroît exponentiellement vers zéro.

Pour tous $0 \leq e \leq d$, on pose

1. $R = d + 1$ si $G = \mathrm{Sp}(2m)$,
2. $R = 2d + 2$ si $G = \mathrm{Spin}(2m + 1)$,
3. $R = 2d + 1$ si $G = \mathrm{Spin}(2m)$,
4. $R = d + e + 2$ et $S = d - e + 1$ si $G = \mathrm{SO}(2m + 1)$,
5. $R = d + e + 1$ et $S = d - e + 1$ si $G = \mathrm{SO}(2m)$.

On conserve les notations attachées à R et S , et on définit

$$\Sigma_R = \frac{2}{p^{k+1}} \sin\left(\frac{\pi}{p^{k+1}}\right) \sum_{a \in A} \sin\left(\frac{\pi(R+2a)}{p^{k+1}}\right), \quad \Sigma_S = \frac{2}{p^{l+1}} \sin\left(\frac{\pi}{p^{l+1}}\right) \sum_{b \in B} \sin\left(\frac{\pi(S+2b)}{p^{l+1}}\right).$$

On pose enfin

1. $c = \Sigma_R (2 \cos(\frac{\pi}{2p^{k+1}}))^{2d}$ si $\mathcal{F} = (\mathrm{Sp}(2q))_{q \geq 1}$,
2. $c = 2^{d+1} \Sigma_R (2 \cos(\frac{\pi}{p^{k+1}}))^{2d+1}$ si $\mathcal{F} = (\mathrm{Spin}(2q + 1))_{q \geq 1}$,
3. $c = 2^d \Sigma_R (2 \cos(\frac{\pi}{p^{k+1}}))^{2d}$ si $\mathcal{F} = (\mathrm{Spin}(2q))_{q \geq 1}$,
4. $c = 2 \Sigma_R \Sigma_S (2 \cos(\frac{\pi}{p^{k+1}}) + 2 \cos(\frac{\pi}{p^{l+1}}))^{2d+1}$ si $\mathcal{F} = (\mathrm{SO}(2q + 1))_{q \geq 1}$,
5. $c = 2 \Sigma_R \Sigma_S (2 \cos(\frac{\pi}{p^{k+1}}) + 2 \cos(\frac{\pi}{p^{l+1}}))^{2d}$ si $\mathcal{F} = (\mathrm{SO}(2q))_{q \geq 1}$.

Proposition 7.33 *Soient $0 \leq e \leq d$ et p fixés.*

1. *Soit $\mathcal{F} = (\mathrm{Sp}(2q))_{q \geq 1}$. On a*

$$\dim L_{d+n}(\omega_n) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} c 4^n \cos^{2n} \left(\frac{\pi}{2p^{k+1}} \right).$$

2. *Soit $\mathcal{F} = (\mathrm{Spin}(2q + 1))_{q \geq 1}$ ou $(\mathrm{Spin}(2q))_{q \geq 1}$. On a*

$$\dim L_{d+n}(\omega_+ + \Omega_n) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} c 8^n \cos^{2n} \left(\frac{\pi}{p^{k+1}} \right).$$

CHAPITRE 7. MODULES SIMPLES DE PLUS HAUT POIDS ω_I OU $\omega_I + \omega_J$

3. Soit $\mathcal{F} = (\mathrm{SO}(2q+1))_{q \geq 1}$ ou $(\mathrm{SO}(2q))_{q \geq 1}$. On a

$$\dim L_{d+n}(\Omega_n + \Omega_{n+d-e}) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} c 4^n \left(\cos\left(\frac{\pi}{p^{k+1}}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{p^{l+1}}\right) \right)^{2n}.$$

Démonstration. La démonstration est immédiate, en notant toutefois que pour les groupes spin et spéciaux orthogonaux, deux termes de la formule de la proposition 7.31 apportent une contribution (en fait la même contribution). Pour les groupes spin par exemple, ce sont les termes correspondant à $j = 1$ et $j = p^{t_k+1} - 1$. \square

Chapitre 8

Modules de Weyl de plus haut poids

ω_r ou $\omega_+ + \omega_r$

Dans ce dernier chapitre, on considère les modules de Weyl de plus haut poids ω_r si $G = \mathrm{Sp}(2m)$, et de plus haut poids $\omega_+ + \omega_r$ si G est un groupe spin. On rappelle tout d'abord quels sont leurs facteurs de composition, et on mentionne les critères d'irréductibilité obtenus par Premet et Suprunenko [39] pour les modules de Weyl $\Delta(\omega_r)$ si $G = \mathrm{Sp}(2m)$ et $p > 2$.

La connaissance des facteurs de composition, associée au théorème 7.26, fournit une condition nécessaire et suffisante, liant r et $m - r$, pour qu'un module de Weyl de plus haut poids ω_r (resp. $\omega_+ + \Omega_r$) soit simple. A partir de cette condition, on obtient la liste de tous ces modules de Weyl simples et leur nombre.

On améliore ensuite le théorème 7.26 en montrant qu'on peut y remplacer $\dim(?)$ par $\mathrm{ch}(?)$. On obtient donc le caractère des modules simples de plus haut poids ω_r si $G = \mathrm{Sp}(2m)$, et de plus haut poids $\omega_+ + \omega_r$ si G est un groupe spin, sous forme d'une somme alternée de caractères de modules de Weyl. On arrive à ce résultat en inversant les matrices de décomposition des modules de Weyl. L'idée de la démonstration est d'utiliser la nature fractale des matrices en jeu pour procéder par récurrence. On termine ce chapitre par une application aux caractères des modules simples de $\mathrm{SL}(2)$, qu'on exprime comme somme alternée de caractères de modules de Weyl.

8.1 Matrices de décomposition

On rappelle deux résultats dus respectivement à Donkin [13] et James [24], en reprenant les notations du chapitre 4.

Proposition 8.1 (*Donkin*) ([2], proposition 1.6) *On a $[\Delta(\lambda) : L(\mu)] = [T(\tilde{\mu}) : \Delta(\tilde{\lambda})]$.*

On introduit maintenant une définition importante de James [24]. On rappelle que pour tout entier positif j , la décomposition en base p de j désigne l'écriture $j = \sum_{i \geq 0} j_i p^i$, avec $j_i \in \mathbb{N}$ et $0 \leq j_i \leq p - 1$ pour tout i .

Définition 8.2 Si $a = \sum a_i p^i$ et $b = \sum b_i p^i$ sont les décompositions respectives en base p des entiers a et b , on écrit $a \subset b$ si, pour tout i , on a $a_i = 0$ ou $a_i = b_i$.

La définition initiale de James comporte en fait une condition supplémentaire, condition dont on voit, grâce au lemme 8.21, qu'elle est automatiquement vérifiée dans le théorème ci-dessous. Considérons les représentations modulaires du groupe symétrique S_n associées à des partitions de n en au plus deux parts. Pour tous $0 \leq j \leq i \leq \frac{n}{2}$, on note $S^{(n-i,i)}$ le module de Specht associé à la partition $(n-i, i)$ et $D^{(n-j,j)}$ le S_n -module simple associé à la partition $(n-j, j)$. Si on pose $j' = n+1-2j$ et $i' = n+1-2i$, on a le théorème qui suit.

Théorème 8.3 (James [24]) Les facteurs de composition de $S^{(n-i,i)}$ sont sans multiplicité, et $D^{(n-j,j)}$ est un facteur de composition de $S^{(n-i,i)}$ si et seulement si $\frac{j'-i'}{2} \subset j'$.

Le théorème suivant fournit la matrice de décomposition des modules de Weyl $\Delta(\omega_r)$ et $\Delta(\omega_+ + \omega_r)$. Il a été obtenu pour $G = \mathrm{Sp}(2m)$ et $p > 2$ par Premet et Suprunenko [39] grâce au théorème de James ci-dessus, et pour $G = \mathrm{Spin}(2m+1)$ on le trouve dans [36].

On reprend les notations de la définition 7.22 et on les complète comme suit :

Définition 8.4 Pour tout $r \leq m$ on pose

1. $M = m+1$ et $R = M - r$ si $G = \mathrm{Sp}(2m)$,
2. $M = 2m+2$ et $R = M - 2r$ si $G = \mathrm{Spin}(2m+1)$,
3. $M = 2m+1$ et $R = M - 2r$ si $G = \mathrm{Spin}(2m)$,

et soit $R = \sum_{i=f}^k R_i p^i$ la décomposition en base p de R .

Pour $0 \leq j \leq m$, on note toujours Ω_j la somme $\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_j$, et le module $L(\omega_0)$ est le module trivial.

Théorème 8.5 Soit $1 \leq r \leq m$.

Si $G = \mathrm{Sp}(2m)$, on a $\mathrm{ch} \Delta(\omega_r) = \sum_{\frac{r-j}{2} \subset M-j} \mathrm{ch} L(\omega_j)$.

Si $G = \mathrm{Spin}(2m+1)$, on a $\mathrm{ch} \Delta(\omega_+ + \Omega_r) = \sum_{r-j \subset M-2j} \mathrm{ch} L(\omega_+ + \Omega_j)$.

Si $G = \mathrm{Spin}(2m)$, on a

$\mathrm{ch} \Delta(\omega_+ + \Omega_r) = \sum_{\substack{r-j \subset M-2j \\ r-j \text{ pair}}} \mathrm{ch} L(\omega_+ + \Omega_j) + \sum_{\substack{r-j \subset M-2j \\ r-j \text{ impair}}} \mathrm{ch} L(\omega_- + \Omega_j)$.

Démonstration. Si $G = \mathrm{Sp}(2m)$, la formule a été obtenue par Baranov et Suprunenko dans [6] pour tout p . La proposition précédente appliquée à la $(\mathrm{Sp}(2m), \mathrm{SL}(2))$ paire duale montre alors que pour le groupe $\mathrm{SL}(2)$, on a $[T(s) : \Delta(r)] = 1$ si $\frac{s-r}{2} \subset s+1$ et $[T(s) : \Delta(r)] = 0$ sinon. On applique alors à nouveau la proposition précédente à la $(\mathrm{Spin}(2m+1), \mathrm{SL}(2))$ paire duale et à la $(\mathrm{Spin}(2m), \mathrm{O}(3))$ paire duale pour obtenir les formules voulues. \square

8.2. MODULES DE WEYL SIMPLES

Si $G = \mathrm{Sp}(2m)$ et $p > 2$, Premet et Suprunenko [39] ont également obtenu plusieurs conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un module de Weyl de plus haut poids ω_r soit irréductible. On rappelle brièvement ces conditions, v_p étant la valuation p -adique sur \mathbb{Q}^* .

Théorème 8.6 [39] *Soit $1 \leq r \leq m$.*

1. *Le module de Weyl $\Delta(\omega_r)$ est simple si et seulement si pour tout entier j vérifiant $1 \leq j \leq \frac{r}{2}$, on a $v_p\left(\binom{m-r+1}{j} + 1\right) \leq 0$.*
2. *Le module de Weyl $\Delta(\omega_r)$ est simple si et seulement si pour tout entier j vérifiant $0 \leq j < r$ et $j \equiv r \pmod{2}$, p ne divise pas $C_{m-r+1+\frac{r-j}{2}}^{\frac{r-j}{2}}$.*

8.2 Modules de Weyl simples

On pourra consulter Jantzen ([25], II,8.21) sur la simplicité des modules de Weyl. Rappelons simplement que les modules de Weyl de plus haut poids un poids fondamental sont simples pour les groupes de type A , B et D (cf. Wong [47]). Dans cette section, on se propose de déterminer, pour $G = \mathrm{Sp}(2m)$, $\mathrm{Spin}(2m+1)$ ou $\mathrm{Spin}(2m)$, tous les modules de Weyl simples de plus haut poids ω_r ($\omega_+ + \Omega_r$ pour les groupes spin). On démontre tout d'abord le théorème-clé de cette partie, qui donne une condition nécessaire et suffisante entre r et $m-r$ pour que $\Delta(\omega_r)$ (ou $\Delta(\omega_+ + \Omega_r)$) soit simple. On conserve les notations de la définition 8.4.

Théorème 8.7 *Soit $1 \leq r \leq m$.*

Si $G = \mathrm{Sp}(2m)$, $\Delta(\omega_r)$ est simple si et seulement si $r < 2(p - R_f)p^f$.

Si $G = \mathrm{Spin}(2m+1)$ ou $\mathrm{Spin}(2m)$, $\Delta(\omega_+ + \Omega_r)$ est simple si et seulement si $r < (p - R_f)p^f$.

Démonstration. Si $G = \mathrm{Sp}(2m)$ et $r < 2(p - R_f)p^f$, il résulte immédiatement du théorème 7.26 que $\dim L(\omega_r) = \dim \Delta(\omega_r)$, et comme $L(\omega_r)$ est un quotient de $\Delta(\omega_r)$, on a $\Delta(\omega_r) \simeq L(\omega_r)$.

Si $G = \mathrm{Sp}(2m)$ et $r \geq 2(p - R_f)p^f$, posons $j = r - 2(p - R_f)p^f \geq 0$. On a alors $\frac{r-j}{2} = (p - R_f)p^f \subset M - j = R + 2(p - R_f)p^f$, et donc d'après 8.5 on a $\dim \Delta(\omega_r) \geq \dim L(\omega_r) + \dim L(\omega_j) > \dim L(\omega_r)$.

L'argument est le même si $G = \mathrm{Spin}(2m+1)$ ou $\mathrm{Spin}(2m)$. □

Ce critère est beaucoup plus simple que ceux de [39] rappelés plus haut, mais le lecteur pourra vérifier facilement qu'il leur est équivalent (en utilisant si besoin est la remarque sur la nullité des coefficients binomiaux modulo p dans l'exemple 3.5).

On peut maintenant se réduire à l'étude de l'ensemble $I_p(N)$ défini comme suit.

Définition 8.8 *Pour tout entier $N \geq 2$ et pour tout $0 \leq r < N$, on pose $N - r = \sum_{i=f}^k R_i p^i$. On note $I_p(N)$ l'ensemble des entiers naturels r tels que $r < 2(p - R_f)p^f$, et on désigne par $C_p(N)$ le cardinal de $I_p(N)$.*

CHAPITRE 8. MODULES DE WEYL DE PLUS HAUT POIDS ω_R OU $\omega_+ + \omega_R$

Cette définition est cohérente avec la définition du paragraphe précédant, comme on le voit dans le corollaire suivant. Remarquons que 0 et 1 sont des éléments de $I_p(N)$. Notons aussi que si $r = 0$, on peut convenir que le module de Weyl $\Delta(\omega_r)$ est le module trivial. Comme le module $\Delta(\omega_+ + \Omega_0)$ est simple, on a le corollaire

Corollaire 8.9 *Si $G = \mathrm{Sp}(2m)$ et $0 \leq r \leq m$, $\Delta(\omega_r)$ est simple si et seulement si r appartient à $I_p(M)$.*

Si $G = \mathrm{Spin}(2m + 1)$ ou $\mathrm{Spin}(2m)$ et $0 \leq r \leq m$, $\Delta(\omega_+ + \Omega_r)$ est simple si et seulement si $2r$ appartient à $I_p(M)$.

Avant d'aller plus loin, nous établissons un résultat qui n'est pas indispensable pour la suite mais qui va éclairer l'énoncé du théorème qu'on a en vue.

Définition 8.10 *On écrit $N = \sum_{i=1}^h N_i p^{s_i}$ avec $1 \leq N_i \leq p - 1$ pour tout i et $0 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_h$.*

Proposition 8.11 *Si r est dans $I_p(N)$ et $r + p^f < N$, alors $r + p^f$ est dans $I_p(N)$.*

En particulier $\sum_{i=1}^j N_i p^{s_i}$ est dans $I_p(N)$ pour tout $j \leq h - 1$.

Démonstration. On a $N = r + \sum_{i=f}^k R_i p^i = (r + p^f) + (R_f - 1)p^f + R_{f+1}p^{f+1} + \dots$. Si $R_f \geq 2$, on a bien $r + p^f < 2(p - (R_f - 1))p^f$ puisque $r + p^f < 2(p - R_f)p^f + p^f$ et $2(p - (R_f - 1))p^f = 2(p - R_f)p^f + 2p^f$. Supposons $R_f = 1$. Comme $r + p^f < N$, on a $R = p^f + \sum_{i \geq g} R_i p^i$ avec $g > f$ et $R_g \neq 0$. Par conséquent $r + p^f < (2p - 2R_f + 1)p^f < 2(p - R_g)p^g$, et $r + p^f$ est dans $I_p(N)$.

On a toujours 0 dans $I_p(N)$, et en itérant la première partie de la proposition, on trouve le résultat annoncé. \square

On peut déjà obtenir facilement la valeur de $C_p(N)$. On note \log_p le logarithme de base p , et pour tout nombre réel x , $[x]$ désigne sa partie entière.

Proposition 8.12 *On a $C_p(N) = (p - 1)[\log_p(N)] + \left\lceil \frac{N}{p^{[\log_p(N)]}} \right\rceil$.*

Démonstration. Posons $f(N) = (p - 1)s_h + N_h$. La formule à démontrer se réécrit alors $C_p(N) = f(N)$. Il est clair que si $N + 1 = dp^t$ avec $1 \leq d \leq p - 1$, on a $f(N + 1) = f(N) + 1$, et $f(N + 1) = f(N)$ sinon. Comme $C_p(2) = 2 = f(2)$, il suffit d'établir que $C_p(N + 1) = C_p(N) + 1$ si $N + 1 = dp^t$ avec $1 \leq d \leq p - 1$ et $C_p(N + 1) = C_p(N)$ sinon.

On a $N = r + \sum_{i=f}^k R_i p^i$, d'où $N + 1 = (r + 1) + \sum_{i=f}^k R_i p^i$. Si r n'est pas dans $I_p(N)$, on en déduit que $r + 1$ n'est pas dans $I_p(N + 1)$. Si r est dans $I_p(N)$, alors

8.2. MODULES DE WEYL SIMPLES

$r + 1$ est dans $I_p(N + 1)$, sauf lorsque $r = 2(p - R_f)p^f - 1$, ce qui équivaut à $N = 2(p - R_f)p^f - 1 + \sum_{i=f}^k R_i p^i = (p - R_f)p^f - 1 + p^{f+1} + R_{f+1}p^{f+1} + \dots = (p - R_f)p^f - 1 + p^{f+1}u$, avec u non nul. Autrement dit $N + 1$ a au moins deux chiffres non nuls dans son écriture en base p . En conclusion, si $N + 1 = dp^t$ avec $1 \leq d \leq p - 1$, on a r' dans $I_p(N + 1)$ si et seulement si $r' = 0$ ou $r' - 1$ est dans $I_p(N)$, et donc $C_p(N + 1) = C_p(N) + 1$. Dans le cas contraire, r' est dans $I_p(N + 1)$ si et seulement si $r' = 0$ ou $r' - 1$ est dans $I_p(N)$ privé de l'élément $2(p - R_f)p^f - 1$, et par conséquent $C_p(N + 1) = C_p(N)$. \square

Remarquons que la preuve précédente fournit une construction itérative de $I_p(N)$, mais on va procéder de manière plus directe pour déterminer $I_p(N)$. On peut noter également que les formules obtenues dans cette dernière démonstration, à savoir $C_p(N + 1) = C_p(N) + 1$ si $N + 1 = dp^t$ avec $1 \leq d \leq p - 1$ et $C_p(N + 1) = C_p(N)$ sinon, montrent en particulier que, lorsque $G = \text{Sp}(2m)$, les modules de Weyl de plus haut poids un poids fondamental sont tous simples si et seulement si $p \geq m + 1$.

Théorème 8.13 *Soit $0 \leq r < N$. Alors r appartient à $I_p(N)$ si et seulement si $r = 0$ ou r figure dans dans le tableau ci-dessous :*

r	conditions
dp^s	$s < s_1$, $1 \leq d \leq p - 1$
dp^{s_1}	$1 \leq d \leq N_1 - 1$
$\sum_{i=1}^j N_i p^{s_i}$	$1 \leq j < h$
$\sum_{i=1}^j N_i p^{s_i} + dp^{s_j}$	$1 \leq j < h$, $N_j + 1 \leq d \leq p - 1$
$\sum_{i=1}^j N_i p^{s_i} + dp^s$	$1 \leq j < h$, $s_j < s < s_{j+1}$, $1 \leq d \leq p - 1$
$\sum_{i=1}^j N_i p^{s_i} + dp^{s_{j+1}}$	$1 \leq j < h$, $1 \leq d \leq N_{j+1} - 1$

Démonstration. L'entier r appartient à $I_p(N)$ si et seulement si il vérifie l'une des deux conditions suivantes :

1. $r = dp^s$ avec $d = 0$, ou ($s < s_1$ et $1 \leq d \leq p - 1$), ou ($s = s_1$ et $1 \leq d \leq N_1 - 1$).
2. Il existe $1 \leq j < h$ tel que $r = \sum_{i=1}^j N_i p^{s_i} + dp^s$ avec $d = 0$, ou ($s = s_j$ et $N_j + 1 \leq d \leq p - 1$), ou ($s_j < s < s_{j+1}$ et $1 \leq d \leq p - 1$), ou ($s = s_{j+1}$ et $1 \leq d \leq N_{j+1} - 1$).

Vérifions tout d'abord qu'on a bien $(p-1)s_h + N_h$ valeurs distinctes pour r , comme le veut la proposition précédente. Dans le premier cas, on a $1 + (p-1)s_1 + N_1 - 1 = (p-1)s_1 + N_1$ valeurs. Dans le second cas, pour un j fixé, on a $1 + (p - N_j - 1) + (p-1)(s_{j+1} - s_j - 1) + N_{j+1} - 1 = (p-1)(s_{j+1} - s_j) + N_{j+1} - N_j$ valeurs. En faisant la somme, on trouve bien $(p-1)s_h + N_h$ valeurs distinctes.

Il ne reste plus qu'à vérifier que toutes les valeurs prises par r sont dans $I_p(N)$. Il suffit de traiter le second cas, le premier s'obtenant de même. Soit donc $r = \sum_{i=1}^j N_i p^{s_i} + dp^s$. Si $d = 0$, la proposition 8.11 donne le résultat. Si $s_j < s < s_{j+1}$ et $1 \leq d \leq p-1$, ou si $s = s_j$ et $N_j + 1 \leq d \leq p-1$, on a $N = r + (p-d)p^s + (p-1)p^{s+1} + \dots + (p-1)p^{s_{j+1}-1} + (N_{j+1}-1)p^{s_{j+1}} + \dots$, et dans tous les cas on a $r < 2dp^s$. Si $s = s_{j+1}$ et $1 \leq d \leq N_{j+1} - 1$, on a $N = r + (N_{j+1} - d)p^{s_{j+1}} + \dots$ avec $1 \leq N_{j+1} - d \leq p-1$ et $r < 2dp^{s_{j+1}} < 2(p - N_{j+1} + d)p^{s_{j+1}}$. \square

Corollaire 8.14 *Soit $G = \mathrm{Sp}(2m)$, $p = 2$ et $m + 1 = \sum_{i=1}^h p^{s_i}$ avec $0 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_h$ et $s_0 = 0$. Il y a exactement $s_h + 1$ modules de Weyl $\Delta(\omega_r)$ simples, et le module de Weyl $\Delta(\omega_r)$ est simple si et seulement si $r = 0$, $r = 1$ ou $r = \sum_{i=1}^j p^{s_i} + p^s$ avec $0 \leq j \leq h-1$, $s_j < s \leq s_{j+1}$ et $s < s_h$.*

Remarquons qu'en combinant les résultats de [14] et [24] sur les représentations modulaires du groupe symétrique S_n , on trouve par les mêmes raisonnements que, si la partition $(n-i, i)$ est p -régulière, le module de Specht $S^{(n-i, i)}$ est simple si et seulement si $2i \in I_p(n+1)$. On vérifie facilement que cette condition équivaut au théorème 23.13 de [24], qui dit que $S^{(n-i, i)}$ est simple si et seulement si, pour tout $1 \leq j \leq i$, on a $v_p(j) = v_p(n+1-2i+j)$, v_p étant la valuation p -adique sur \mathbb{Q}^* . Cet énoncé est évidemment à rapprocher des critères de Premet et Suprunenko.

8.3 Inverse de la matrice de décomposition

On détermine ici les inverses des matrices de décomposition obtenues dans la section précédente. Cela nous permet d'améliorer le théorème 7.26, et on en déduit également un résultat apparemment nouveau pour $\mathrm{SL}(2)$ dans la section suivante.

8.3.1 Notations

Définition 8.15 *Si $a = \sum a_i p^i$ avec $0 \leq a_i \leq p-1$ pour tout i et $b = \sum_{i \geq s} b_i p^i$ avec $0 \leq b_i \leq p-1$ pour tout i et $b_s \neq 0$, on écrit*

1. $a \prec_1 b$ si $a_0 = \dots = a_s = 0$ et $a_i + b_i < p$ pour tout $i > s$.
2. $a \prec_{-1} b$ si $a_0 = \dots = a_{s-1} = 0$, $a_s + b_s = p$ et $a_i + b_i < p$ pour tout $i > s$.
3. $a \prec b$ si $a \prec_1 b$ ou $a \prec_{-1} b$.

8.3. INVERSE DE LA MATRICE DE DÉCOMPOSITION

On rappelle la définition de M : si $G = \mathrm{Sp}(2m)$ on a $M = m + 1$, si $G = \mathrm{Spin}(2m + 1)$ on a $M = 2m + 2$, et si $G = \mathrm{Spin}(2m)$ on a $M = 2m + 1$. Pour tous $0 \leq r, j \leq m$ on introduit les notations suivantes. Si $G = \mathrm{Sp}(2m)$, on pose $R = M - r$ et $J = M - j$, et si $G = \mathrm{Spin}(2m + 1)$ ou $\mathrm{Spin}(2m)$ on pose $R = M - 2r$ et $J = M - 2j$. Les théorèmes 7.26 et 8.5 peuvent alors se reformuler comme suit. On notera leur ressemblance avec le théorème 8.3.

Théorème Soit $0 \leq r \leq m$.

Si $G = \mathrm{Sp}(2m)$, on a $\mathrm{ch} \Delta(\omega_r) = \sum_{\frac{J-R}{2} \subset J} \mathrm{ch} L(\omega_j)$.

Si $G = \mathrm{Spin}(2m + 1)$, on a $\mathrm{ch} \Delta(\omega_+ + \Omega_r) = \sum_{\frac{J-R}{2} \subset J} \mathrm{ch} L(\omega_+ + \Omega_j)$.

Si $G = \mathrm{Spin}(2m)$, on a $\mathrm{ch} \Delta(\omega_+ + \Omega_r) = \sum_{\substack{\frac{J-R}{2} \subset J \\ \frac{J-R}{2} \text{ pair}}} \mathrm{ch} L(\omega_+ + \Omega_j) + \sum_{\substack{\frac{J-R}{2} \subset J \\ \frac{J-R}{2} \text{ impair}}} \mathrm{ch} L(\omega_- + \Omega_j)$.

Théorème Soit $0 \leq r \leq m$.

Si $G = \mathrm{Sp}(2m)$, on a $\dim L(\omega_r) = \sum_{\frac{J-R}{2} \prec_{-1} R} \dim \Delta(\omega_j) - \sum_{\frac{J-R}{2} \prec_{-1} R} \dim \Delta(\omega_j)$.

Si $G = \mathrm{Spin}(2m + 1)$ ou $G = \mathrm{Spin}(2m)$, on a $\dim L(\omega_+ + \Omega_r) = \sum_{\frac{J-R}{2} \prec_{-1} R} \dim \Delta(\omega_+ + \Omega_j) - \sum_{\frac{J-R}{2} \prec_{-1} R} \dim \Delta(\omega_+ + \Omega_j)$.

On veut préciser ce dernier théorème en montrant que les égalités entre les dimensions sont en fait des égalités au niveau des caractères, modulo quelques précautions lorsque $G = \mathrm{Spin}(2m)$.

Théorème 8.16 Soit $0 \leq r \leq m$.

Si $G = \mathrm{Sp}(2m)$, on a $\mathrm{ch} L(\omega_r) = \sum_{\frac{J-R}{2} \prec_{-1} R} \mathrm{ch} \Delta(\omega_j) - \sum_{\frac{J-R}{2} \prec_{-1} R} \mathrm{ch} \Delta(\omega_j)$.

Si $G = \mathrm{Spin}(2m + 1)$, on a $\mathrm{ch} L(\omega_+ + \Omega_r) = \sum_{\frac{J-R}{2} \prec_{-1} R} \mathrm{ch} \Delta(\omega_+ + \Omega_j) - \sum_{\frac{J-R}{2} \prec_{-1} R} \mathrm{ch} \Delta(\omega_+ + \Omega_j)$.

Si $G = \mathrm{Spin}(2m)$, on a $\mathrm{ch} L(\omega_+ + \Omega_r) = \sum_{\substack{\frac{J-R}{2} \prec_{-1} R \\ \frac{J-R}{2} \text{ pair}}} \mathrm{ch} \Delta(\omega_+ + \Omega_j) + \sum_{\substack{\frac{J-R}{2} \prec_{-1} R \\ \frac{J-R}{2} \text{ impair}}} \mathrm{ch} \Delta(\omega_- + \Omega_j) - \sum_{\substack{\frac{J-R}{2} \prec_{-1} R \\ \frac{J-R}{2} \text{ pair}}} \mathrm{ch} \Delta(\omega_+ + \Omega_j) - \sum_{\substack{\frac{J-R}{2} \prec_{-1} R \\ \frac{J-R}{2} \text{ impair}}} \mathrm{ch} \Delta(\omega_- + \Omega_j)$.

Exemple 8.17 On améliore ici les exemples qui suivent les théorèmes 6.1 et 7.26 : si $G = \mathrm{Sp}(2m)$ et $r = 2$, on a

$$\mathrm{ch} L(\omega_2) = \begin{cases} \mathrm{ch} \Delta(\omega_2) - e^0 & \text{si } p \text{ divise } m, \\ \mathrm{ch} \Delta(\omega_2) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour démontrer que ce dernier théorème est équivalent au théorème 8.5, il suffit de prouver que les matrices associées sont inverses l'une de l'autre. Ceci nous amène à la définition suivante.

Définition 8.18 Pour tout entier n , on définit les matrices carrées unipotentes inférieures $A(n)_{1 \leq i, j \leq n}$ et $B(n)_{1 \leq i, j \leq n}$ d'ordre n par

1. $A(n)_{i, j} = 1$ si $\frac{i-j}{2} \prec_1 n + 1 - i$,
2. $A(n)_{i, j} = -1$ si $\frac{i-j}{2} \prec_{-1} n + 1 - i$,
3. $A(n)_{i, j} = 0$ sinon,
4. $B(n)_{i, j} = 1$ si $\frac{i-j}{2} \subset n + 1 - j$,
5. $B(n)_{i, j} = 0$ sinon.

Remarquons que si $A(n)_{i, j}$ ou $B(n)_{i, j}$ est non nul, i et j ont même parité.

Lemme 8.19 Si on a $A(n)^{-1} = B(n)$ pour tout n , alors le théorème 8.16 est vrai.

Démonstration. Si $G = \mathrm{Sp}(2m)$, $A(M)$ et $B(M)$ sont les matrices associées aux systèmes linéaires donnés par les théorèmes 8.5 et 8.16, d'où le résultat.

Si $G = \mathrm{Spin}(2m + 1)$, les matrices des deux systèmes linéaires s'obtiennent en ne gardant que les lignes et les colonnes de numéro impair de $A(M)$ et $B(M)$, et elles sont donc également inverses l'une de l'autre (puisque si i et j n'ont pas la même parité, $A(M)_{i, j} = B(M)_{i, j} = 0$).

Si $G = \mathrm{Spin}(2m)$, rappelons que $\tau(\lambda_1 \varepsilon_1 + \dots + \lambda_m \varepsilon_m) = \lambda_1 \varepsilon_1 + \dots - \lambda_m \varepsilon_m$. On a $\mathrm{ch} \Delta(\omega_+ + \Omega_r) + \mathrm{ch} \Delta(\tau(\omega_+ + \Omega_r)) = \sum_{\frac{J-R}{2} \subset J} (\mathrm{ch} L(\omega_+ + \Omega_j) + \mathrm{ch} L(\tau(\omega_+ + \Omega_j)))$

pour tout $r \leq m$, et le même argument que ci-dessus montre que ces relations s'inversent pour donner $\mathrm{ch} L(\omega_+ + \Omega_r) + \mathrm{ch} L(\tau(\omega_+ + \Omega_r)) = \sum_{\frac{J-R}{2} \prec_1 R} (\mathrm{ch} \Delta(\omega_+ + \Omega_j) +$

$\mathrm{ch} \Delta(\tau(\omega_+ + \Omega_j))) - \sum_{\frac{J-R}{2} \prec_{-1} R} (\mathrm{ch} \Delta(\omega_+ + \Omega_j) + \mathrm{ch} \Delta(\tau(\omega_+ + \Omega_j)))$. On pose

$$S_1 = \sum_{\substack{\frac{J-R}{2} \prec_1 R \\ \frac{J-R}{2} \text{ pair}}} \mathrm{ch} \Delta(\omega_+ + \Omega_j) + \sum_{\substack{\frac{J-R}{2} \prec_1 R \\ \frac{J-R}{2} \text{ impair}}} \mathrm{ch} \Delta(\omega_- + \Omega_j) - \sum_{\substack{\frac{J-R}{2} \prec_{-1} R \\ \frac{J-R}{2} \text{ pair}}} \mathrm{ch} \Delta(\omega_+ + \Omega_j) - \sum_{\substack{\frac{J-R}{2} \prec_{-1} R \\ \frac{J-R}{2} \text{ impair}}} \mathrm{ch} \Delta(\omega_- + \Omega_j),$$

$$S_2 = \sum_{\substack{\frac{J-R}{2} \prec_1 R \\ \frac{J-R}{2} \text{ pair}}} \mathrm{ch} \Delta(\tau(\omega_+ + \Omega_j)) + \sum_{\substack{\frac{J-R}{2} \prec_1 R \\ \frac{J-R}{2} \text{ impair}}} \mathrm{ch} \Delta(\tau(\omega_- + \Omega_j)) - \sum_{\substack{\frac{J-R}{2} \prec_{-1} R \\ \frac{J-R}{2} \text{ pair}}} \mathrm{ch} \Delta(\tau(\omega_+ + \Omega_j)) - \sum_{\substack{\frac{J-R}{2} \prec_{-1} R \\ \frac{J-R}{2} \text{ impair}}} \mathrm{ch} \Delta(\tau(\omega_- + \Omega_j)).$$

En remarquant que lorsque $\frac{J-R}{2}$ est impair, on a $j \neq r$ et donc $\tau(\omega_- + \Omega_j) = \omega_+ + \Omega_j$, on voit que $\mathrm{ch} L(\omega_+ + \Omega_r) + \mathrm{ch} L(\tau(\omega_+ + \Omega_r)) = S_1 + S_2$, ce qui s'écrit aussi $\mathrm{ch} L(\omega_+ + \Omega_r) - S_1 = S_2 - \mathrm{ch} L(\tau(\omega_+ + \Omega_r))$. Tous les poids μ qui figurent dans le membre de gauche vérifient $\mu \leq \omega_+ + \Omega_r$, et tous les poids μ qui figurent dans le membre de droite vérifient $\mu \leq \tau(\omega_+ + \Omega_r)$. Or aucun poids μ ne peut vérifier à la fois $\mu \leq \omega_+ + \Omega_r$ et $\mu \leq \tau(\omega_+ + \Omega_r)$: la somme de ses coordonnées dans la base $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$ serait à la fois paire et impaire. On en déduit que $\mathrm{ch} L(\omega_+ + \Omega_r) - S_1 = S_2 - \mathrm{ch} L(\tau(\omega_+ + \Omega_r)) = 0$.

□

8.3. INVERSE DE LA MATRICE DE DÉCOMPOSITION

On peut opérer une dernière réduction. Pour cela, un changement de coordonnées est nécessaire. On définit les matrices $\tilde{A}(n)$ et $\tilde{B}(n)$ en posant $\tilde{A}(n)_{u,v} = A(n)_{n+1-u, n+1-v}$ et $\tilde{B}(n)_{u,v} = B(n)_{n+1-u, n+1-v}$, autrement dit

1. $\tilde{A}(n)_{u,v} = 1$ si $\frac{v-u}{2} \prec_1 u$,
2. $\tilde{A}(n)_{u,v} = -1$ si $\frac{v-u}{2} \prec_{-1} u$,
3. $\tilde{A}(n)_{u,v} = 0$ sinon,
4. $\tilde{B}(n)_{u,v} = 1$ si $\frac{v-u}{2} \subset v$,
5. $\tilde{B}(n)_{u,v} = 0$ sinon.

On a alors clairement, pour tout entier n ,

$$\tilde{A}(n+1) = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & * \\ & \tilde{A}(n) & & \vdots \\ & & & * \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right), \tilde{B}(n+1) = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & * \\ & \tilde{B}(n) & & \vdots \\ & & & * \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right) \text{ et par consé-}$$

$$\text{quent } \tilde{A}(n+1)\tilde{B}(n+1) = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & * \\ & \tilde{A}(n)\tilde{B}(n) & & \vdots \\ & & & * \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Ainsi, pour montrer que $\tilde{A}(n)$ et $\tilde{B}(n)$ sont inverses l'une de l'autre, il suffit de l'établir pour $\tilde{A}(n+1)$ et $\tilde{B}(n+1)$. En particulier il suffit de montrer que, pour tout n , $\tilde{A}(p^n)^{-1} = \tilde{B}(p^n)$, ce qui équivaut à $A(p^n)^{-1} = B(p^n)$.

8.3.2 Structure fractale

On donne ici la description récursive des matrices $A(p^n)$ et $B(p^n)$, dont on déduit facilement que $A(p^n)^{-1} = B(p^n)$ pour tout n . La justification de cette structure récursive est l'objet des sections suivantes. Remarquons que la matrice de décomposition que nous étudions est fortement liée à celle du groupe symétrique pour les partitions en au plus deux parts (cf. [24]), et la structure fractale de cette dernière matrice a déjà été signalée dans [21]. On peut donner facilement un début d'explication à cette structure pour la matrice $B(p^n)$: d'après la proposition 8.1, si on a $1 \leq r, s \leq p^n$, la multiplicité $[\Delta(\omega_{p^n-r}) : L(\omega_{p^n-s})]$ pour le groupe symplectique $\text{Sp}(2(p^n - 1))$ est égale à la multiplicité $[T(s-1) : \Delta(r-1)]$ pour $\text{SL}(2)$. On a vu, au cours de la démonstration du théorème 8.5, que $[T(s-1) : \Delta(r-1)] = 1$ si $\frac{s-r}{2} \subset s$ et $[T(s-1) : \Delta(r-1)] = 0$ sinon. On a donc $[T(s-1) : \Delta(r-1)] = [T(ps-1) : \Delta(pr-1)]$, d'où $[\Delta(\omega_{p^n-r}) : L(\omega_{p^n-s})] = [\Delta(\omega_{p^n-pr}) : L(\omega_{p^n-ps})]$.

Introduisons quelques notations. Pour tout n , Id_n est la matrice identité d'ordre

$$n \text{ et } E_n = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \text{ est d'ordre } n. \text{ Les matrices } A(p^n) \text{ et } B(p^n)$$

satisfont à

1. $A(p) = B(p) = \text{Id}_p$.

2. $A(p^{n+1}) = \begin{pmatrix} A(p^n) & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -A(p^n)E_{p^n} & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ A(p^n)E_{p^n}^2 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ -A(p^n)E_{p^n} & \ddots & & \ddots & & \vdots \\ A(p^n)E_{p^n}^2 & \ddots & & & & 0 \\ \vdots & & & \cdots & -A(p^n)E_{p^n} & A(p^n) \end{pmatrix}$

3. $B(p^{n+1}) = \begin{pmatrix} B(p^n) & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ E_{p^n}B(p^n) & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & E_{p^n}B(p^n) & B(p^n) \end{pmatrix}$

Exemple 8.20 Pour $p = 3$ et $n = 4$, les matrices $A(p^n)$ et $B(p^n)$ sont représentées sur les pages 111 et 112. Seuls y figurent les coefficients non nuls.

Montrons que $A(p^n)B(p^n) = \text{Id}_{p^n}$ pour tout n : si A est un anneau non commutatif et x, y, z sont dans A , on a

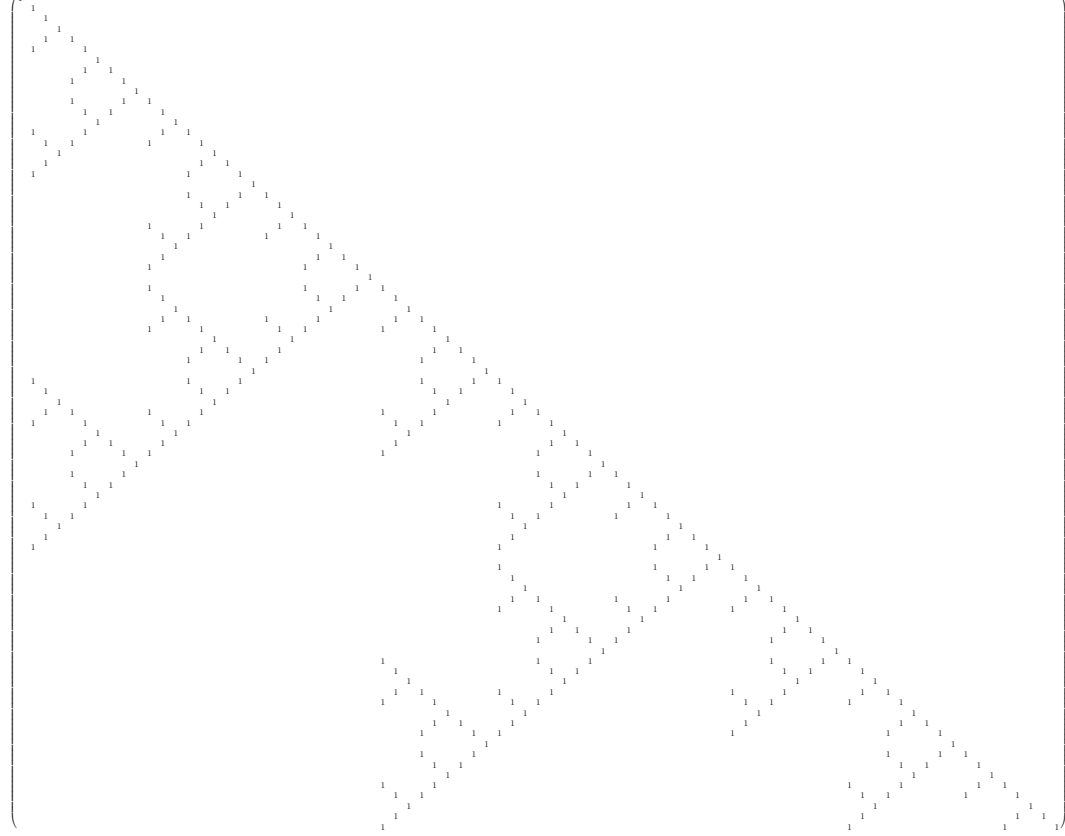
$$\begin{pmatrix} x & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -xz & \ddots & \ddots & & \vdots \\ xz^2 & \ddots & & \ddots & \vdots \\ -xz^3 & & & & 0 \\ \vdots & & \cdots & -xz & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ zy & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & zy & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & xy \end{pmatrix}$$

Si on applique cette remarque à $x = A(p^n)$, $y = B(p^n)$ et $z = E_{p^n} = z^3$, on obtient que $A(p^{n+1})B(p^{n+1}) = \text{Id}_{p^{n+1}}$ si et seulement si $A(p^n)B(p^n) = \text{Id}_{p^n}$, et c'est évidemment le cas pour $n = 1$.

8.3. INVERSE DE LA MATRICE DE DÉCOMPOSITION



CHAPITRE 8. MODULES DE WEYL DE PLUS HAUT POIDS ω_R OU $\omega_+ + \omega_R$



8.3. INVERSE DE LA MATRICE DE DÉCOMPOSITION

8.3.3 Matrices $\tilde{B}(p^n)$

Il nous reste à établir la construction de $A(p^{n+1})$ et $B(p^{n+1})$ à partir de $A(p^n)$ et $B(p^n)$. Il est plus commode de raisonner avec les matrices $\tilde{A}(p^n)$ et $\tilde{B}(p^n)$, et on traite tout d'abord les matrices $\tilde{B}(p^n)$ qui ont une structure simple.

On commence par étudier quelques propriétés des couples (u, v) d'entiers relatifs vérifiant $v \geq 0$, $-v \leq u \leq v$ et $\frac{v-u}{2} \subset v$. On s'intéresse notamment à la stabilité de la relation $\frac{v-u}{2} \subset v$ sous la symétrie $u \mapsto -u$ et sous certaines translations $(u, v) \mapsto (u+k, v+k)$.

Lemme 8.21 *Soient u et v deux entiers tels que $-v \leq u \leq v$. On a $\frac{v-u}{2} \subset v$ si et seulement si $v = v_0 + v_1p + \dots + v_kp^k$ et $u = \pm v_0 \pm v_1p \pm \dots \pm v_{k-1}p^{k-1} \pm v_kp^k$ avec v_k non nul et $0 \leq v_i \leq p-1$ pour tout i . Si on a $u \geq 0$, alors $\frac{v-u}{2} \subset v$ équivaut à $v = v_0 + v_1p + \dots + v_kp^k$ et $u = \pm v_0 \pm v_1p \pm \dots \pm v_{k-1}p^{k-1} + v_kp^k$. En particulier, si $v = v_kp^k$ et $u \geq 0$, on a $\frac{v-u}{2} \subset v$ si et seulement si $u = v$.*

Démonstration. Supposons $\frac{v-u}{2} \subset v$ et $v = v_0 + v_1p + \dots + v_kp^k$ comme dans l'énoncé. On a donc une partition de $\{0, \dots, k\}$ en deux ensembles X et Y tels que $\frac{v-u}{2} = \sum_{i \in X} v_i p^i$ et $\frac{v+u}{2} = \sum_{i \in Y} v_i p^i$. Comme $u = \frac{v+u}{2} - \frac{v-u}{2}$, on trouve $u = \pm v_0 \pm v_1p \pm \dots \pm v_{k-1}p^{k-1} \pm v_kp^k$, et si u est positif, on a nécessairement $u = \pm v_0 \pm v_1p \pm \dots \pm v_{k-1}p^{k-1} + v_kp^k$. La réciproque est claire. \square

Lemme 8.22 *Soient u et v deux entiers tels que $-v \leq u \leq v$. On a $\frac{v-u}{2} \subset v$ si et seulement si $\frac{v+u}{2} \subset v$. Si $p^n > v$, $d \geq 1$ et $\frac{v-u}{2} \subset v$, alors $\frac{(v+dp^n)-(u+dp^n)}{2} \subset v + dp^n$.*

Démonstration. Si on a $a \subset b$, il est clair que $b - a \subset b$, ce qui prouve la première assertion. La seconde assertion est immédiate. \square

On définit la matrice $F_n = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$ d'ordre n , on considère la

matrice $D(p) = \text{Id}_p$ et on définit les matrices $D(p^n)$, $n \geq 1$, par la relation de récurrence

$$D(p^{n+1}) = \begin{pmatrix} D(p^n) & F_{p^n}D(p^n) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & F_{p^n}D(p^n) \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & D(p^n) \end{pmatrix}.$$

On veut montrer que pour tout n , $D(p^n) = \tilde{B}(p^n)$. Ceci équivaut à dire que pour tout $v \leq p^n$, $D(p^n)_{u,v} \neq 0$ si et seulement si $\frac{v-u}{2} \subset v$. On procède par récurrence sur n .

1. Si $n = 1$ et $v \leq p$, on a $\frac{v-u}{2} \subset v$ si et seulement si $u = v$ d'après le lemme 8.21, d'où $D(p) = \tilde{B}(p)$.
2. Supposons que $D(p^n) = \tilde{B}(p^n)$, et déterminons les couples (u', v') tels que $D(p^{n+1})_{u',v'}$ soit non nul. Deux possibilités se présentent :
 - (a) soit $u' = dp^n + u$ et $v' = dp^n + v$ avec $v \leq p^n$, $0 \leq d \leq p-1$ et $D(p^n)_{u,v} \neq 0$,
 - (b) soit $u' = dp^n - u$ et $v' = dp^n + v$ avec $u < p^n$, $v \leq p^n$, $1 \leq d \leq p-1$ et $D(p^n)_{u,v} \neq 0$.

Supposons que $D(p^{n+1})_{u',v'} \neq 0$. Si $v < p^n$, comme $\frac{v-u}{2} \subset v$, le lemme 8.22 montre que $\frac{v'-u'}{2} \subset v'$. Si $v = p^n$, on a $u = p^n$, on est donc dans le cas où $u' = dp^n + u$ et $v' = dp^n + v$, et on a bien $\frac{v'-u'}{2} \subset v'$. On a donc montré que si $D(p^{n+1})_{u',v'} \neq 0$, on a $\frac{v'-u'}{2} \subset v'$.

La réciproque se déduit du lemme 8.21 : si $p^n < v' < p^{n+1}$ et $\frac{v'-u'}{2} \subset v'$, on a $v' = v_0 + v_1p + \dots + v_np^n$ et $u' = \pm b_0 \pm v_1p \pm \dots \pm v_{n-1}p^{n-1} + v_np^n$, et on pose $v = v' - v_np^n$, $u = \pm(u' - v_np^n) \geq 0$ et $d = v_n$. On a donc $v' = dp^n + v$ et $u' = dp^n \pm u$ avec $1 \leq d \leq p-1$, $u < p^n$, $v \leq p^n$ et $\frac{v-u}{2} \subset v$, autrement dit $D(p^n)_{u,v} \neq 0$. Ceci montre que $D(p^{n+1})_{u',v'} \neq 0$. Si $v' \leq p^n$ et $\frac{v'-u'}{2} \subset v'$, on a évidemment $D(p^{n+1})_{u',v'} \neq 0$, et enfin si $v' = p^{n+1}$ et $\frac{v'-u'}{2} \subset v'$, on a $u' = v' = (p-1)p^n + p^n$ et $D(p^n)_{p^n, p^n} \neq 0$, d'où $D(p^{n+1})_{u',v'} \neq 0$.

8.3.4 Matrices $\tilde{A}(p^n)$

On commence là aussi par quelques lemmes sur la relation $\frac{v-u}{2} \prec u$.

Lemme 8.23 Soient $1 \leq u \leq v = dp^n$ avec $1 \leq d \leq p-1$. Si on a $\frac{v-u}{2} \prec u$, alors $u = v$.

Démonstration. On pose $z = \frac{v-u}{2}$ et $u = u_s p^s + \dots + u_n p^n$ avec $u_s \neq 0$ et $0 \leq u_i \leq p-1$ pour tout i . On a $v = 2z + u = u_s p^s + \dots$ ou $(p - u_s)p^s + \dots$, ce qui implique $s = n$, $2z = (d - u_n)p^n < (p - u_n)p^n$ et enfin $z = 0$. \square

Lemme 8.24 Soit $1 \leq u < p^n$, $u \leq v < 2p^n$ et $\frac{v-u}{2} \prec u$. Si $\frac{v-u}{2} \prec_1 u$, on a $\frac{(2p^n-v)-u}{2} \prec_{-1} u$, et si $\frac{v-u}{2} \prec_{-1} u$, on a $\frac{(2p^n-v)-u}{2} \prec_1 u$.

Démonstration. On pose $z = \frac{v-u}{2}$ et on écrit $u = u_s p^s + \dots + u_{n-1} p^{n-1}$, $z = z_s p^s + \dots + z_{n-1} p^{n-1}$ avec $u_s \neq 0$ et $0 \leq u_i, z_i \leq p-1$ pour tout i . On a $\frac{(2p^n-v)-u}{2} = p^n - u - z = (p - u_s - z_s)p^s + \sum_{i=s+1}^{n-1} (p - 1 - u_i - z_i)p^i$. Pour tout $i > s$, on a $0 \leq p - 1 - u_i - z_i \leq p - 1$ et $(p - 1 - u_i - z_i) + u_i \leq p - 1$, et si $z_s = 0$ (resp. $z_s = p - u_s$), alors on a $(p - u_s - z_s)p^s = (p - u_s)p^s$ (resp. 0), d'où le résultat. \square

8.3. INVERSE DE LA MATRICE DE DÉCOMPOSITION

Lemme 8.25 Soient $1 \leq u \leq v$ et soit $i = \pm 1$. Si $2p^n > v$, $d \geq 1$ et $\frac{v-u}{2} \prec_i u$, alors $\frac{(v+dp^n)-(u+dp^n)}{2} \prec_i u + dp^n$.

Démonstration. Evidente. □

On définit les matrices $C(p^n)$ par récurrence en posant $C(p) = \text{Id}_p$ et

$$C(p^{n+1}) = \begin{pmatrix} C(p^n) & \cdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & & \ddots & C(p^n)F_{p^n}^2 \\ \vdots & \ddots & & \ddots & -C(p^n)F_{p^n} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & C(p^n)F_{p^n}^2 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & -C(p^n)F_{p^n} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & C(p^n) \end{pmatrix}. \text{ On veut montrer que}$$

pour tout n , $C(p^n) = \tilde{A}(p^n)$. Ceci équivaut à dire que pour tout $v \leq p^n$, $C(p^n)_{u,v} = 1$ (resp. -1) si et seulement si $\frac{v-u}{2} \prec_1 u$ (resp. $\frac{v-u}{2} \prec_{-1} u$), et $C(p^n)_{u,v} = 0$ sinon. On procède par récurrence sur n .

1. Si $n = 1$, le lemme 8.23 montre qu'on a $C(p) = \tilde{A}(p)$.
2. On suppose que $C(p^n) = \tilde{A}(p^n)$, et on détermine les couples (u', v') tels que $C(p^{n+1})_{u',v'}$ soit non nul. Ils sont de trois formes :
 - (a) on a $u' = dp^n + u$ et $v' = dp^n + v$ avec $u \leq v \leq p^n$, $0 \leq d \leq p-1$ et $C(p^{n+1})_{u',v'} = C(p^n)_{u,v} \neq 0$,
 - (b) on a $u' = dp^n + u$ et $v' = (d+2+2e)p^n + v$ avec $u \leq v < p^n$, $d \geq 0$, $e \geq 0$, $0 \leq d+2+2e \leq p-1$ et $C(p^{n+1})_{u',v'} = C(p^n)_{u,v} \neq 0$,
 - (c) on a $u' = dp^n + u$ et $v' = (d+2+2e)p^n - v$ avec $u \leq v < p^n$, $0 \leq d+2+2e \leq p$ et $C(p^{n+1})_{u',v'} = -C(p^n)_{u,v} \neq 0$.

Supposons que $C(p^{n+1})_{u',v'} \neq 0$ et $v < p^n$. Dans les deux premiers cas, à savoir $v' = dp^n + v$ ou $v' = (d+2+2e)p^n + v$, le lemme 8.25 montre que comme $\frac{v-u}{2} \prec_i u$, on a $\frac{v'-u'}{2} \prec_i u'$. Si $v' = (d+2+2e)p^n - v$ et $\frac{v-u}{2} \prec_i u$, il résulte du lemme 8.24 que $\frac{v'-u'}{2} \prec_{-i} u$. On en déduit bien que si $C(p^{n+1})_{u',v'} = 1$ (resp. -1), on a $\frac{v'-u'}{2} \prec_1 u'$ (resp. $\frac{v'-u'}{2} \prec_{-1} u'$). Si $C(p^{n+1})_{u',v'} \neq 0$ et $v = p^n$, on a $u = v$ d'après 8.23 et $u' = dp^n + u = dp^n + v = v'$, d'où $C(p^{n+1})_{u',v'} = C(p^n)_{u,v} = 1$ et $\frac{v'-u'}{2} \prec_1 u'$.

Réciproquement, supposons $\frac{v'-u'}{2} \prec_i u'$ et $p^n < v' < p^{n+1}$. On pose $z = \frac{v'-u'}{2} = z_0 + \cdots + z_n p^n$, $v' = v'_0 + \cdots + v'_n p^n$, $u' = u'_0 + \cdots + u'_n p^n$, avec $0 \leq z_j, v'_j, u'_j \leq p-1$ pour tout j . On a $v' = u' + 2z$ et en considérant les retenues éventuelles dans l'addition de u' et $2z$, on voit que $v'_n = u'_n + 2z_n$ ou $v'_n = u'_n + 2z_n + 1$. Si $v'_n = u'_n + 2z_n$, on pose $v = v' - u'_n p^n - 2z_n p^n$ et $u = u' - u'_n p^n$, et on trouve $\frac{v-u}{2} = z - z_n p^n$. Comme $z \prec_i u'$, on a $z - z_n p^n \prec_i u' - u'_n p^n$, ce qui s'écrit $\frac{v-u}{2} \prec_i u$ avec $u \leq v < p^n$, d'où $C(p^n)_{u,v} = i$ et $C(p^{n+1})_{u',v'} = i$. Si $v'_n = u'_n + 2z_n + 1$, on pose $u = u' - u'_n p^n < p^n$ et $v = 2p^n - (v' - u'_n p^n - 2z_n p^n) \leq$

p^n . Remarquons qu'on a nécessairement $u' \neq v'$, et le lemme 8.23 implique que $v < p^n$. On a $\frac{(2p^n-v)-u}{2} = z - z_n p^n \prec_i u' - u'_n p^n = u$, et on déduit du lemme 8.24 que $\frac{v-u}{2} = \frac{(2p^n-(2p^n-v))-u}{2} \prec_{-i} u$, avec $u \leq v < p^n$. On a donc $C(p^{n+1})_{u',v'} = -C(p^n)_{u,v} = -(-i) = i$. Si $v' \leq p^n$ et $\frac{v'-u'}{2} \prec_i v'$, on a $C(p^{n+1})_{u',v'} = i$, et enfin si $v' = p^{n+1}$ et $\frac{v'-u'}{2} \prec_i v'$, on a $u' = v' = (p-1)p^n + p^n$, $i = 1$ et $C(p^n)_{p^n,p^n} = 1$, d'où $C(p^{n+1})_{u',v'} = 1$.

8.4 Application à $SL(2)$

On termine cette thèse par une jolie application de ce qui précède aux caractères des modules simples de $SL(2)$. Rappelons que les facteurs de composition des modules de Weyl de $SL(2)$ ont été décrits par Carter et Cline [8], Deriziotis [11] et Winter [46]. Nous obtenons tout d'abord une description de ces facteurs exprimée à l'aide de la relation \subset . Pour cela nous utilisons le théorème suivant.

Théorème 8.26 [46] *Soient $r, s \geq 0$ et $s = \sum s_i p^i$ avec $0 \leq s_i \leq p-1$ pour tout i . Alors $[\Delta(r) : L(s)] = 1$ si et seulement si il existe un sous-ensemble fini I de \mathbb{N} tel que $r = \sum_{i \in I} (2p-2-s_i)p^i + \sum_{i \notin I} s_i p^i$.*

Corollaire 8.27 *Soient $0 \leq s \leq r \leq p^k - 1$. On a $[\Delta(r) : L(s)] = 1$ si et seulement si $\frac{r-s}{2} \subset p^k - 1 - s$.*

Démonstration. Posons $z = \frac{r-s}{2}$ et $s = \sum_{i=0}^{k-1} s_i p^i$ avec $0 \leq s_i \leq p-1$ pour tout i .

Si $z \subset p^k - 1 - s$, il existe un sous-ensemble I de $\{0, 1, \dots, k-1\}$ tel que $z = \sum_{i \in I} (p-1-s_i)p^i$, et on a $r = s + 2z = \sum_{i \notin I} s_i p^i + \sum_{i \in I} (2p-2-s_i)p^i$, d'où $[\Delta(r) : L(s)] = 1$ d'après le théorème précédent. Réciproquement, s'il existe un sous-ensemble fini I de \mathbb{N} tel que $r = \sum_{i \in I} (2p-2-s_i)p^i + \sum_{i \notin I} s_i p^i$, on a $z = \sum_{i \in I} (p-1-s_i)p^i \leq p^k - 1$, ce qui implique $I \subset \{0, 1, \dots, k-1\}$ et donc $z \subset p^k - 1 - s$. \square

Ce résultat est aussi une conséquence immédiate de la proposition 2.8 de [6]. Baranov et Suprunenko y montrent en effet l'équivalence entre la combinatoire de Carter et Cline [8] en terme de réflexions admissibles et la combinatoire de la relation \subset .

Ce corollaire, associé aux résultats de la section précédente, permet d'exprimer explicitement $\text{ch } L(r)$ comme une somme alternée de caractères de modules de Weyl.

Proposition 8.28 *Soit $0 \leq r$ et $r+1 = \sum_{i \geq s} a_i p^i$ avec $0 \leq a_i \leq p-1$ pour tout i et $a_s \neq 0$. Si on pose $J = \{\sum_{i > s} c_i p^i \mid 0 \leq c_i \leq a_i \text{ pour tout } i\}$, on a*

$$\text{ch } L(r) = \sum_{\substack{j \in J \\ r-2j \geq 0}} \text{ch } \Delta(r-2j) - \sum_{\substack{j \in J \\ r-2a_s p^s - 2j \geq 0}} \text{ch } \Delta(r-2a_s p^s - 2j).$$

8.4. APPLICATION À $SL(2)$

Démonstration. Soit $k \geq 1$ tel que $r + 1 \leq p^k - 1$, et posons $n = p^k - 1$. Pour tout $1 \leq r' \leq n$, on a $\text{ch } \Delta(r' - 1) = \sum_{1 \leq s' \leq r'} B(n)_{r',s'} \text{ch } L(s' - 1)$ d'après le corollaire, avec les notations de la section précédente. On en déduit $\text{ch } L(r' - 1) = \sum_{1 \leq s' \leq r'} A(n)_{r',s'} \text{ch } \Delta(s' - 1)$ pour tout $1 \leq r' \leq n$, en particulier pour $r' = r + 1$. On veut déterminer les s' tels que $s' = r' - 2j$ avec $j \prec p^k - r'$. Comme $p^k - r' = p^k - (1 + r) = (p - a_s)p^s + \sum_{i=s+1}^{k-1} (p - 1 - a_i)p^i$, on a $j \prec_1 p^k - r'$ si et seulement si $j \in J$ et $j < p^k$, et $j \prec_{-1} p^k - r'$ si et seulement si $j - a_s p^s \in J$ et $j < p^k$. La condition $j < p^k$ est automatiquement vérifiée si $s' = r' - 2j$ puisque $s' \geq 0$, et on a donc la formule annoncée. \square

Bibliographie

- [1] Andersen H. H., Jantzen J. C. and Soergel W., ‘Representations of quantum groups at a p th root of unity and of semisimple groups in characteristic p : independence of p ’, *Astérisque* **220** (1994) 321 pp.
- [2] Adamovich A. M. and Rybnikov G. L., ‘Tilting modules for classical groups and Howe duality in positive characteristic’, *Transform. Groups* **1** (1996) 1–34.
- [3] Andersen H. H., ‘An Inversion Formula for the Kazhdan-Lusztig Polynomials for Affine Weyl Groups’, *Advances in Mathematics* **60** (1986) 125–153.
- [4] Borel A., ‘Linear algebraic groups’, *Graduate Texts in Mathematics* **126** (1991).
- [5] Bourbaki N., ‘Groupes et algèbres de Lie’, chap. IV-VI *Hermann* (1968).
- [6] Baranov A. A. and Suprunenko I. D., ‘Branching rules for modular fundamental representations of symplectic groups’, *Bull. London Math. Soc.* **32** no.4 (2000) 409–420.
- [7] Broucker T. and tom Dieck T., ‘Representations of compact Lie groups’. *Graduate Texts in Mathematics* **98** (1991).
- [8] Carter R. and Cline E., ‘The submodule structure of Weyl modules for groups of type A_1 ’, *Proceedings of the Conference on Finite Groups (Univ. Utah, 1975)*, Academic Press, New York (1976) 303–311.
- [9] ‘Representations of reductive groups’. Edited by R. W. Carter and M. Geck. *Publ. Newton Inst.*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998.
- [10] Chevalley C., ‘The Algebraic Theory of Spinors and Clifford Algebras’. Collected Works, Vol. 2. *Springer-Verlag, Berlin*, 1997.
- [11] Deriziotis D. I., ‘The submodule structure of Weyl modules for groups of type A_1 ’, *Comm. Algebra* **9** no.3 (1981) 247–265.
- [12] Digne F. et Michel J., ‘Groupes réductifs non connexes’, *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.* 4^{ème} série **27** (1994) 345–406.
- [13] Donkin S., ‘On tilting modules for algebraic groups’, *Math. Z.* **212** (1993) 39–60.
- [14] Erdmann K., ‘tensors products and dimensions of simple modules for symmetric groups’, *Manuscripta Math.* **88** (1995) 357–386.
- [15] Erdmann K., ‘Symmetric groups and quasi-hereditary algebras’, Finite-dimensional algebras and related topics (Ottawa, ON, 1992), 123–161, *NATO*

- Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci.* **424**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1994.
- [16] Foulle S., ‘Formules de caractères pour des représentations irréductibles du groupe symplectique en caractéristique p ’, *C. R. Acad. Sci. Paris Ser.I* **335** (2002) 11–16.
- [17] Fulton W. and Harris J., ‘Representation theory. A first course’, *Graduate Texts in Mathematics* **129**.
- [18] Georgiev G. and Mathieu O., ‘Fusion rings for modular representations of Chevalley groups’, Mathematical aspects of conformal and topological field theories and quantum groups (South Hadley, MA, 1992), 89–100, *Contemp. Math.* **175**.
- [19] Gow R., ‘Construction of $p-1$ irreducibles modules with fundamental highest weight for the symplectic group in characteristic p ’, *J. London Math. Soc.* **58** no.2 (1998) 619–632.
- [20] Green J., ‘Polynômial representations of $GL(n)$ ’, *Lecture Notes in Math.* **848** (1981) 124–140.
- [21] Henke A. E., ‘Schur subalgebras and an application to the symmetric group’, *J. Algebra* **233** no.1 (2000) 342–362.
- [22] Howe R., ‘Perspectives on invariant theory : Schur duality, multiplicity-free actions and beyond’, The Schur lectures (Tel Aviv, 1992), *Israel Math. Conf. Proc.* **8** (1995) 1–182.
- [23] Humphreys J. E., ‘Introduction to Lie algebras and representation theory’, *Graduate Texts in Mathematics* **9** (1972).
- [24] James G. D., ‘The Representation Theory of the Symmetric Groups’, *Lecture Notes in Math.* **682** (1978).
- [25] Jantzen J., ‘Representations of algebraic groups’, *Academic Press, Orlando* (1987).
- [26] Jantzen J., ‘Darstellungen halbeinfacher algebraischer Gruppen und zugeordnete kontravariante Formen’, *Bonner Mathematische Schriften* **67** (1973).
- [27] Jensen J. G., ‘On the character of some modular indecomposable tilting modules for $SL(3)$ ’, *J. Algebra* **232** no.2 (2000) 397–419.
- [28] King R. C. and El-Sharkaway N., ‘Standards Young tableaux and weight multiplicities of the classical Lie groups’, *J. Phys. A* **16** (1983) 3153–3178.
- [29] Klimyk A. U., ‘Decomposition of a tensor product of irreducibles representations of a semisimple Lie algebra into a direct sum of irreducibles representations’, *AMS Translations Ser. 2*, **76**.
- [30] Koike K. and Terada I., ‘Young diagrammatic methods for the restriction of representations of complex classical Lie groups to reductive subgroups of maximal rank’, *Advances in Mathematics* **79** (1990) 104–135.

BIBLIOGRAPHIE

- [31] Lauritzen N. and Buch A., '<http://home.imf.au.dk/abuch/dynkin/>'.
- [32] Littelmann P., 'A generalization of the Littlewood-Richardson rule', *J. Algebra* **130** no.2 (1990) 328–368.
- [33] Lawson H. and Michelsohn M.-L., 'Spin geometry', *Princeton University Press, Princeton, New Jersey*, 1989.
- [34] '<http://wwwmathlabo.univ-poitiers.fr/~maavl/LiE/>'.
- [35] Lusztig G., 'Some problems in the representation theory of finite Chevalley groups', The Santa Cruz Conference on Finite Groups, 1979, *Proc. Symp. Pure Math.* **37** (1980) 313–317.
- [36] McNinch G. J., 'Filtrations and positive characteristic Howe duality', *Math. Z.* **235** no.4 (2000) 651–685.
- [37] Mathieu O. and Papadopoulo G., 'A character formula for a family of simple modular representations of $GL(n)$ ', *Comm. Math. Helvetici* **74** (1999) 280–296.
- [38] Mathieu O., 'Tilting modules and their applications', Analysis on Homogeneous Spaces and Representation Theory of Lie Groups, *Advanced Studies in Pure Mathematics* **26** (2000) 145–212.
- [39] Premet A. A. and Suprunenko I. D., 'The Weyl modules and the irreducible representations of the symplectic group with the fundamental highest weights', *Comm. Algebra* **11** (1983) 309–342.
- [40] Proctor R. A., 'Young tableaux, Gel'fand patterns, and branching rules for classical groups', *J. Algebra* **164** (1994) 299–360.
- [41] Springer T. A., 'Linear algebraic groups', *Progress in Mathematics* **9** (1998).
- [42] Suprunenko I. D. and Zalesskii A. E., 'Representations of dimension $(p^n \pm 1)/2$ of the symplectic group of degree $2n$ over a field of characteristic p ', *Vestnik Akad. Navuk. BSSR, Ser. Fiz.-Mat. Navuk* **6** (1987) 9–15.
- [43] Wendt R., 'Weyl's character formula for non-connected Lie groups and orbital theory for twisted affine Lie algebras', *Journal of Functional Analysis* **180** (2001) 31–65.
- [44] Weyl H., 'The Classical groups', *Princeton Univ. Press, Princeton*, 1946.
- [45] Weyman J., 'Pieri's formulas for classical groups', *Contemporary Mathematics* **88** (1989) 177–184.
- [46] Winter P. W., 'On the modular representation theory of the two-dimensional special linear group over an algebraically closed field', *J. London Math. Soc. ser. 2* **16** (1977) 237–252.
- [47] Wong W. J., 'Representations of Chevalley groups in characteristic p ', *Nagoya Math. J.* **45** (1971) 39–78.
- [48] Zhelobenko D. P., 'The classical groups : Spectral analysis of their finite-dimensional representations', *Russian Math. Surveys* **17** (1962) 1–94.

BIBLIOGRAPHIE

Soit p un nombre premier et G un groupe classique de type B , C ou D défini sur la clôture algébrique K du corps à p éléments (si G est de type B ou D , p est impair). A l'aide de paires duales de groupes et de modules basculants, on trouve le caractère de certaines représentations rationnelles irréductibles de G sur K . On obtient tout d'abord des formules en termes de tableaux semi-standard, non couvertes par la conjecture de Lusztig. Puis on détermine la dimension et/ou le caractère des représentations irréductibles de plus haut poids un poids fondamental, ou une somme de deux poids fondamentaux, suivant G . On en déduit notamment le comportement asymptotique de leur dimension, à p fixé, quand le rang du groupe tend vers l'infini. On dresse enfin la liste des modules de Weyl simples de plus haut poids un poids fondamental quand G est un groupe symplectique, ou de plus haut poids la somme d'un poids fondamental et du plus haut poids de la représentation spin quand G est un groupe spin.

Title : Character formulae for irreducible representations of classical groups in equal characteristic

Let p be a prime and G a classical group of type B , C or D defined over an algebraic closure K of the finite field with p elements (if the type of G is B or D , p is odd). Using dual pairs and tilting modules, one can find the character of some irreducible rational representations of G over K . One first obtains character formulas expressed with semi-standard tableaux, outside the validity domain of the Lusztig conjecture. Then one determines the dimension and/or character of the irreducible representations whose highest weight is a fundamental weight, or the sum of two fundamental weights, according to G . In particular, for a given p , one deduces the asymptotic behavior of their dimension when the rank of the group is growing towards infinity. Finally, one gets the simple Weyl modules whose highest weight is a fundamental weight when G is a symplectic group, or a sum of a fundamental weight and of the highest weight of the spin representation when G is a spin group.

Discipline : Mathématiques Pures.

Mots-clés : groupes classiques, représentations modulaires irréductibles, modules de Weyl, caractères de Brauer, paires duales, modules basculants, formule modulaire de Verlinde.

Keywords : classical groups, irreducible modular representations, Weyl modules, Brauer characters, dual pairs, tilting modules, modular Verlinde formula.

Institut Girard Desargues
Université Claude Bernard Lyon 1
Bâtiment Braconnier
21, avenue Claude Bernard
69622 Villeurbanne Cedex